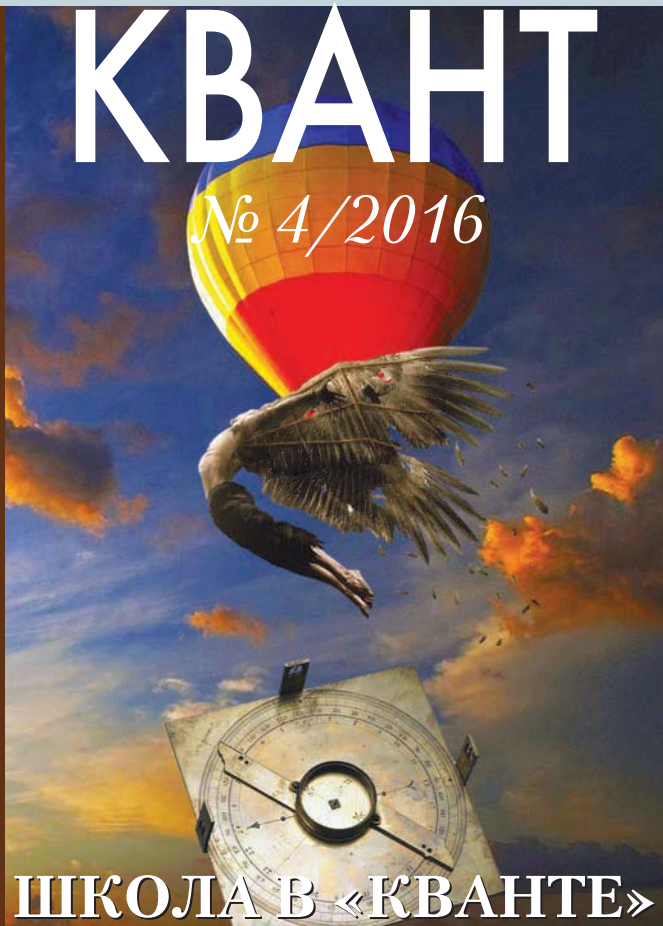




ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№ 4/2016



ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

ЧАСТЬ 3

Приложение к журналу

«КВАНТ»

№4/2016

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

Часть 3

Составители

В.А. Тихомирова, А.И. Черноуцан

Москва

Издательство МЦНМО

2016

УДК 53
ББК 22.3
Ш67

Приложение к журналу
«Квант» №4/2016

Ш67 **Школа в «Кванте». Физика. Часть 3** / Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. – М.: Издательство МЦНМО, 2016. – 232 с. (Приложение к журналу «Квант» №4/2016.)

ISBN 978-5-4439-1106-9

Книга представляет собой сборник статей по всем разделам школьной физики, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Школа в «Кванте» в течение 2009–2014 годов. Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками и живость изложения – вот отличительные особенности статей этой рубрики.

Книга адресована, прежде всего, учащимся и учителям средних школ, лицеев и гимназий. Но она, несомненно, будет интересна и самому широкому кругу читателей.

ББК 22.3

ISBN 978-5-4439-1106-9



9 785443 911069 >



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. МЕХАНИКА	5
Скорость и ускорение (6). Волшебная формула, или Движение со связями (12). Тайна лунных недр (18). Орало и крыло (22). Капли, пузыри и дирижабли (27). Дедал, Икар и центробежная сила (31). О работе, точке приложения силы и точильном круге (35). Два слова о колодце (и не только о нем) (42). О законе Паскаля и физике сливного бачка (50). История с коромыслом (56). Гравитационное «отталкивание» (60). Сверхзвуковые самолеты и конус Маха (65). Сверхзвуковые автобусы, лодки и... деревья (71). Метод эквивалентных деформаций (80).	
Глава 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА	84
Графический способ решения одной физической задачи (85). Задача про «Монгольфьер» (88). Эта манящая глубина (90). Как нанокластер с самолетом столкнулся (93). От точки росы до точки кипения (98). Обжегшись на молоке, на воду дуют... (102).	
Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	108
Электростатика со льдом (109). Расчет электроемкости конденсаторов (114). Загадки магнитной стрелки (119).	
Глава 4. ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА	129
Увеличительная линейка (130). «Нулевые» линзы (132). Оптика колбы (134). Цилиндрическое зеркало-трубка (137). Удивительный угол падения (141). Сиреневый туман... (146). Зачем «близоруко щуриться», или Дифракция на отверстиях (150). Столкновения, рассеяние и небесные знамения (155). Легенда об искажении сигнала (163).	
Глава 5. ОБЩЕЕ	167
Физическое судоку (168). Безработные силы (180). Как Студент капельный излучатель изобрел (184). Соль, огонь и вода (188). «Потенция» и «живая сила» (192). Вихри враждебные... (195). Прекрасные моменты физики (199). Ионосфера и шум цунами (204). Красное небо, синяя луна (209). Энтропия, Демон Максвелла и тепловая смерть Вселенной (214). Пределы точности «точных» наук (219).	
Ответы, указания, решения	224

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлена одна из постоянных рубрик нашего журнала – «Школа в «Кванте». Возникнув около тридцати пяти лет назад, «Школа» сразу завоевала популярность у читателей, интерес к ней не ослабевает и по сей день.

Материалы этой рубрики, как правило менее сложные и элитарные по сравнению с материалами других рубрик, рассчитаны на самый широкий круг читателей. Темы статей обычно перекликаются с разделами школьной программы по физике. Можно сказать, что «Школа в «Кванте» – это интересное чтение «вдоль» этой программы.

Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками, живость и своеобразная эссеичность изложения не только делают статьи «Школы» доступными для самостоятельного изучения, но и позволяют использовать их для докладов и рефератов на школьных факультативах и конференциях или просто для «оживления» текущих занятий.

За прошедшие годы накопилось так много статей «Школы в «Кванте» по физике, что мы решили собрать их в несколько книг. Причем каждую книгу сделать «полноценной», независимой от других – в том смысле, что в нее войдут статьи по всем разделам физики, от кинематики до атомного ядра.

Перед вами – третий выпуск задуманной серии.

МЕХАНИКА



СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

Е. Соколов

Для описания состояния движущегося тела в данный момент времени в кинематике вводятся понятия вектора скорости \vec{v} и вектора ускорения \vec{a} . А когда есть два вектора, то естественно поставить вопрос об их взаимном расположении. Например, такой: *может ли угол между скоростью и ускорением быть равным 37° ?*

Вопрос непростой, и в нашем классе его обсуждение превратилось в оживленную дискуссию.

Первым у нас всегда спешит с ответом Саша.

— Конечно, нет, такого быть не может! А вот угол 90° между скоростью и ускорением может быть (рис.1,а).

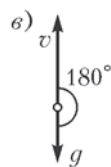
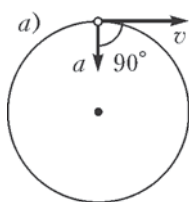


Рис. 1

Мы уже встречались с тем, что когда тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, то у него есть ускорение. Это ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости, т.е. к центру окружности, поэтому ему дали специальное название — центростремительное ускорение.

— И не только 90° , — поправила его Яна. — Помните, мы говорили, что при свободном падении ускорение тела всегда направлено вниз (рис.1,б). Поэтому угол между скоростью и ускорением может быть равен 0° .

— А ведь свободное падение это не только движение вниз, — вмешалась Маша. — Свободным падением называется любое движение тела под действием силы тяжести в отсутствие сопротивления воздуха. Поэтому даже когда мяч летит вверх, его ускорение, согласно нашему правилу, по-прежнему направлено вниз (рис.1,в). Угол между скоростью и ускорением в этом случае равен 180° .

– Вот мы и ответили на ваш вопрос: угол между скоростью и ускорением может принимать три значения, – подытожил разговор Иван.

– Ну что же, вы нашли три возможных угла. Можете отдохнуть и полюбоваться еще одной знакомой вам картинкой (рис.2). Скажу честно – это намек. На рисунке 2 изображена траектория тела, брошенного под углом к горизонту. Такую ситуацию мы не раз обсуждали и говорили, что скорость тела в каждой точке направлена по касательной



Рис. 2

к траектории, а ускорение все время направлено вниз. Ведь куда бы ни летело тело, оно всегда свободно падает. Нарисуем для нескольких точек траектории векторы скорости и ускорения (рис.3). В верхней точке A скорость направлена горизонтально, а ускорение направлено вниз. В этой точке угол между скоростью и ускорением равен 90° . Для точки B соответствующий угол острый, а для точки C – тупой. И понятно, что величины этих углов могут быть любыми.

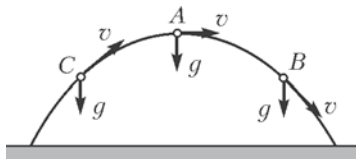


Рис. 3

Итак, вот итог наших размышлений: *угол между скоростью и ускорением может быть любым.*

Это хорошо, что мы с вами нашли правильный ответ, но, к сожалению, жизнь наша от этого только усложнилась. Ведь если бы существовало только три угла, то достаточно было бы выбрать один вариант из трех. Но теперь мы знаем, что ускорение может быть направлено куда угодно, и вариантов стало бесконечно много. Как же быть? Как в задачах правильно рисовать, куда направлено ускорение тела? Сейчас разберемся. Но прежде сделаем общее замечание.

В процессе эволюции человек приобрел способность «видеть» скорость и траекторию. Так, мы хорошо представляем себе, куда полетит брошенный нами снежок, и легко сможем увернуться от него. Поэтому вопросы, связанные со скоростью и траекторией, обычно не вызывают сложностей. Но мы не имеем возможности «видеть» ускорение. Поэтому просто так, по наитию, не стоит пытаться его рисовать. Определить, как направлено ускорение в каждом случае, мы можем только с помощью рассуждений, применяя специальные правила. О двух таких правилах мы уже

знаем: при равномерном движении тела по окружности ускорение следует направлять к центру окружности (доказывается в кинематике), а при свободном падении – вертикально вниз (доказывается в динамике).

– А есть общее правило для любого движения?

– Да, есть. И его под силу вывести любому первокурснику. Но вы еще не первокурсники, а я очень не люблю рассказывать что-то без доказательств. Давайте поступим так: превратим наше обсуждение в тест на обучаемость. Я честно, хотя и без доказательств, расскажу вам все, что нужно для построения ускорения, и даже открою вам некоторые секреты, а потом вы попытаетесь построить ускорение в десяти простых случаях.

– Согласны. Только разве сложно, зная правила, получить ответ?

– Вот это мы как раз и проверим на опыте. А пока слушайте и задавайте вопросы.

Найти направление ускорения помогают два понятия: нормальная составляющая ускорения и тангенциальная составляющая ускорения. Общее правило заключается в том, что сначала строится каждая из этих составляющих (это несложно сделать), а уже по ним – само ускорение, как показано на рисунке 4.

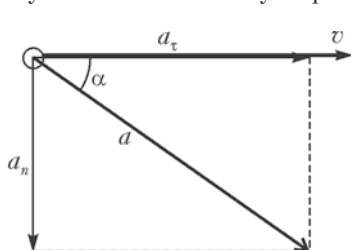


Рис. 4

Нормальная составляющая ускорения – это составляющая, перпендикулярная скорости. Величину нормальной составляющей ускорения всегда можно найти по уже знакомой нам формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Эта составляющая перпендикулярна скорости и направлена по радиусу к центру кривизны траектории. Нормальная составляющая ускорения (центростремительное ускорение) характеризует быстроту изменения направления скорости.

Тангенциальная, или касательная, составляющая – это составляющая, направленная параллельно скорости. Она характеризует быстроту изменения скорости по величине и определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Направлять тангенциальную составляющую следует либо по

направлению скорости, либо против – в зависимости от того, увеличивается скорость или уменьшается.

Определив обе эти составляющие, мы можем с помощью рисунка 4 восстановить само ускорение (иногда говорят «полное ускорение»). При необходимости модуль ускорения и угол между скоростью и ускорением можно вычислить с помощью теоремы Пифагора и понятия арктангенса:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Ну как, понятно?

– Да, вроде все ясно. Сначала рисуем нормальную составляющую ускорения перпендикулярно скорости в направлении к центру кривизны, так же, как мы рисовали центростремительное ускорение. Потом строим вторую составляющую – вдоль или против скорости. И после этого по рисунку 4 находим само ускорение.

– Все правильно. Но прежде чем переходить к тесту, я хочу обратить ваше внимание на очень важные частные случаи. Выполните, пожалуйста, такое упражнение: а) укажите два случая движения тела, в которых нормальная составляющая ускорения обращается в ноль; б) укажите два случая движения тела, в которых тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль. Лучше будет, если вы сами ответите на эти вопросы, но ничего страшного не произойдет, если вы просто прочтете следующие два абзаца.

а) Нормальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_n = v^2/R$. А это может произойти в двух случаях. Первый случай видят все: нормальная составляющая обращается в ноль, если скорость обращается в ноль.¹ Поэтому нормальная составляющая ускорения всегда равна нулю в точках остановки тела. Второй случай увидит лишь тот, кто знает, что общего у прямой, окружности и точки. Оказывается, и точка, и прямая есть частные случаи окружности (рис.5). Точка – это окру-

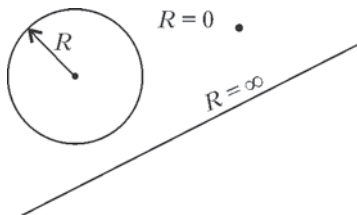


Рис. 5

¹ Для знатоков уточним, что полностью эта фраза должна звучать так: «когда скорость обращается в ноль, а радиус кривизны не равен нулю, т.е. точка остановки не является точкой излома траектории».

ность с радиусом, равным нулю, а прямая – это окружность с радиусом, равным бесконечности. Не верите? Попробуйте нарисовать на компьютере окружность очень большого радиуса. Она практически не будет отличаться от прямой линии. Итак, второй случай, когда нормальная составляющая обращается в ноль, – это случай, когда $R = \infty$, т.е. когда тело движется по прямой. При прямолинейном движении нормальной составляющей ускорения нет.

б) Тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_t = \Delta v / \Delta t = v'(t)$. А это тоже может произойти в двух случаях. Первый случай – это равномерное движение, когда модуль скорости вообще не изменяется. Второй случай – это моменты времени, когда модуль скорости достигает максимума или минимума и производная от модуля скорости по времени становится равной нулю.

Наш рассказ о кинематическом методе построения ускорения закончен. Теперь попробуйте выполнить приведенный ниже тест. В нем собраны, пожалуй, все случаи построения ускорения. Отметим, что этот тест не так прост, как кажется.

Тест. Для каждого из десяти положений тела, изображенных на рисунке 6, нарисуйте, как направлено его ускорение.

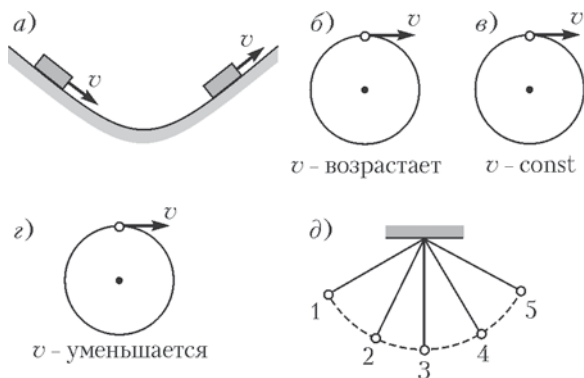


Рис. 6

- а) Санки скатываются с горки, а затем заезжают на горку.
 б) Тело движется по окружности с возрастающей скоростью.
 в) Тело движется по окружности с постоянной скоростью.
 г) Тело движется по окружности с уменьшающейся скоростью.

д) Математический маятник совершает колебания. Точки 1 и 5 – крайние точки, 2 и 4 – промежуточные, 3 – самая нижняя точка.

В заключение – одно полезное замечание. Наш разговор о направлении ускорения мы вели на языке кинематики. Однако говорить об этом можно и на языке динамики. Иногда (но не всегда) динамические рассуждения могут оказаться проще кинематических. Например, с помощью динамики очень легко ответить на исходный вопрос об угле 37° . Динамика учит, что ускорение порождается силой. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{a} = \vec{F}/m$, т.е. куда направлена сила, туда направлено и ускорение. Силу мы можем прикладывать в любом направлении по нашему желанию, поэтому и ускорение, создаваемое этой силой, может иметь любое направление.

ВОЛШЕБНАЯ ФОРМУЛА, ИЛИ ДВИЖЕНИЕ СО СВЯЗЯМИ

Е.Соколов

В этой статье речь пойдет об одной замечательной формуле, которая позволяет единообразно решать целые серии задач. Вот почему мы назвали эту формулу *волшебной*. Полезна наша формула тогда, когда движения точек не свободны, а связаны определенными условиями – *связями*.

Самый известный пример движений со связями дает абсолют-но жесткий стержень (рис.1). Концы стержня, точки A и B , могут двигаться, но их движения всегда таковы, что расстояние между этими точками остается постоянным. Поэтому четыре величины: модуль v_1 скорости точки A , модуль v_2 скорости точки B и углы α и β между скоростями и самим стержнем связаны определенным соотношением, а именно

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta.$$

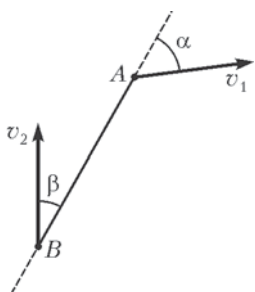


Рис. 1

Это и есть наша замечательная формула.

Вполне возможно, что знатокам наши эпитеты по поводу приведенной формулы покажутся преувеличенными. Они скажут: «Здесь просто записано, что проекции скоростей точек A и B на сам стержень одинаковы. Это само собой очевидно, так и должно быть». Да, знатоки правы. И будет очень хорошо, если и для наших читателей это тоже станет простым и очевидным.

А пока давайте посмотрим, как работает наша волшебная формула при решении конкретных задач.

Задача 1. Катер движется со скоростью $v_k = 10$ м/с (рис.2). Найдите скорость спортсмена, перемещающегося на водных лыжах, если известно, что угол между вектором скорости катера и тросом составляет 30° , а угол между вектором скорости спортсмена и тросом равен 60° .

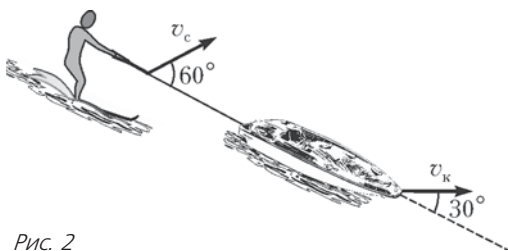


Рис. 2

Решение. Ответ получаем сразу, ведь в этой задаче из четырех величин, входящих в нашу формулу, известны три. Значит, уравнение

$$v_k \cos 30^\circ = v_c \cos 60^\circ$$

позволяет сразу же определить последнюю неизвестную, т.е. скорость спортсмена:

$$v_c = v_k \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 17,3 \text{ м/с}.$$

Интересно отметить, что скорость спортсмена может оказаться больше скорости катера. Спортсмены знают это и используют в своих выступлениях.

Задача 2. Палочка скользит по сторонам прямого угла (рис.3). В некоторый момент скорость точки A равна v_A . Найдите скорость точки B в этот момент, если отрезок AB составляет угол α с горизонтом.

Решение. Из четырех величин, входящих в нашу формулу, две величины – модуль и направление скорости точки A – заданы явно, а две оставшиеся величины мы должны найти. Однако из одного уравнения мы можем определить только одну неизвестную. Поэтому надо искать в условии задачи величину, заданную неявно.

Конечно же, неявно задано направление скорости точки B . Эта точка всегда лежит на вертикальной прямой – эта прямая является ее траекторией. Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории, поэтому скорость точки B направлена вертикально вниз. Теперь оставшуюся неизвестную – модуль скорости точки B – мы можем найти из нашего уравнения.

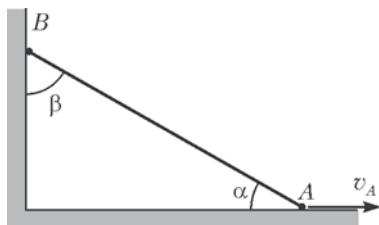


Рис. 3

Учитывая, что $\beta = 90^\circ - \alpha$, получим

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos(90^\circ - \alpha),$$

откуда следует

$$v_B = v_A \frac{\cos \alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} = v_A \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = v_A \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задача 3. Два кольца одного и того же радиуса катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (рис.4,а). Найдите скорость верхней точки пересечения колец в тот момент, когда угол O_1AO_2 равен 2α .

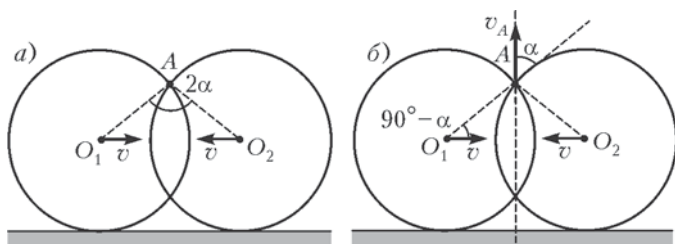


Рис. 4

Решение. До этого мы говорили об отрезках прямых, а годится ли наша формула для окружностей? Вернемся к точкам A и B стержня. О них нам было известно два факта. Первый: они являются концами отрезка. И второй: расстояние между ними не меняется. Первое высказывание не несет никакой информации. Через любые две точки, как бы они ни двигались, всегда можно провести прямую линию. Важен лишь второй факт. А он имеет прямое отношение к окружностям. Ведь если сказано, что точка лежит на окружности, то это означает лишь одно – расстояние между ней и центром окружности обязательно остается постоянным. Поэтому наша формула подходит и для окружностей. Только применять ее следует к радиусам.

Симметрия рисунка 4,а подсказывает, что скорость точки пересечения колец направлена вертикально вверх. Следовательно, направление скорости \vec{v}_A уже известно – оно составляет угол α с радиусом O_1A (рис.4,б). А величину скорости найдем из нашей формулы. Записывая ее для радиуса O_1A , получим

$$v \cos(90^\circ - \alpha) = v_A \cos \alpha,$$

откуда сразу находим

$$v_A = v \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = v \operatorname{tg} \alpha.$$

А что делать, если угадать направление скорости не удастся? Тогда надо честно записать два уравнения для двух неизвестных, модуля скорости и угла, и решить их. Разумеется, для этого надо суметь найти два отрезка, длина каждого из которых по условию задачи не изменяется.

Задача 4. Найдите скорость верхней точки пересечения двух катящихся колес (рис.5,а) в тот момент, когда она находится на одной горизонтали с центром большого колеса. Скорости колес одинаковы и равны v , радиусы колес r и R .

Решение. Вводим неизвестные: v_A – скорость точки A и γ – угол, который она образует с горизонтом (рис.5,б). Скорость точки A образует угол γ с отрезком O_2A и угол $90^\circ + \alpha - \gamma$ с

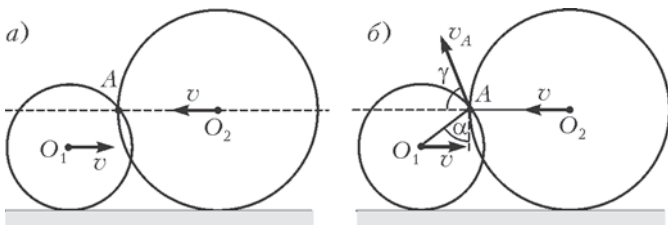


Рис. 5

отрезком O_1A , где $\alpha = \arccos \frac{R-r}{r}$. Для этих двух отрезков наше уравнение принимает вид

$$v_A \cos \gamma = v,$$

$$v_A \cos (90^\circ + \alpha - \gamma) = v \cos (90^\circ - \alpha).$$

Решение этой непростой системы уравнений мы оставляем читателям и приводим лишь окончательный ответ:

$$v_A = v \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = v \sqrt{\frac{4r^2}{(R-r)^2} - 3}.$$

А нет ли более простого метода решения этой задачи? Оказывается, есть.

Метод, который мы предлагаем для решения задач со связями, заключается в переходе в движущуюся систему отсчета. Например, рассматривая движение жесткого стержня (см. рис.1), мы можем «сесть на точку B », т.е. перейти в движущуюся систему отсчета K' , которая движется со скоростью \vec{v}_0 , равной скорости \vec{v}_2 точки B . Выигрыш от такого перехода очевиден. Теперь точка B покоится относительно нас, и вместо двух

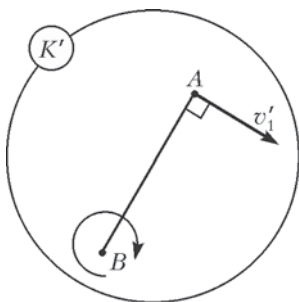


Рис. 6

(рис.6).

В неподвижной системе отсчета K , согласно классическому закону сложения скоростей, скорость точки A равна

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_0 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_2.$$

Давайте прочитаем эту формулу нужным для нас способом: «Да, скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 концов стержня могут быть разными, но отличаются они лишь на вектор \vec{v}'_1 , перпендикулярный самому стержню». А это означает, что проекции скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 на стержень одинаковы (проекция их разности \vec{v}'_1 на сам отрезок равна нулю). Наша волшебная формула подтверждена.

А теперь посмотрим, как с помощью этого метода можно проще решить задачу 4. Прежде подготовимся, чтобы не запутаться в обозначениях. Скорости центров колес, точек O_1 и O_2 , одинаковы: $v_1 = v_2 = v$ и противоположно направлены: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Введем скорость \vec{v}_0 , равную по модулю v и направленную влево. Эта скорость равна скорости большого колеса: $\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$ и противоположна скорости малого колеса: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0$.

«Сядем на большое колесо», т.е. перейдем в систему отсчета K' , движущуюся со скоростью \vec{v}_0 (рис.7,а). В этой системе отсчета большое колесо покоится, а малое движется вправо со скоростью $2v$. Нетрудно убедиться в том, что наш ответ для движущейся системы отсчета таков – скорость точки пересечения направлена вертикально вверх и равна

$$v'_A = 2vtg\alpha, \text{ где } \alpha = \arccos \frac{R-r}{r}.$$

Нам осталось лишь вернуться в лабораторную систему отсчета и с помощью классического закона сложения скоростей $\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_0$ пересчитать скорость точки A . Используя рисунок 7,б, получаем

движущихся точек осталась только одна точка A . Это большое упрощение.

Действительно, если точка B покоится, то единственным возможным движением стержня может быть только вращение относительно этой точки. При этом скорость \vec{v}'_1 точки A (относительно новой системы отсчета K') может быть любой по величине, но направлена она обязательно перпендикулярно стержню

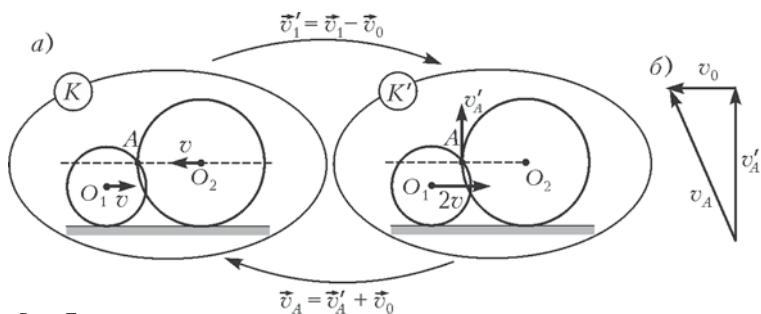


Рис. 7

окончательный ответ:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_A'^2} = v\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = v\sqrt{\frac{4r^2}{(R-r)^2} - 3}.$$

Решение закончено, ответ получен. Расплата за простоту — необходимость пересчитывать скорости при переходе из одной системы отсчета в другую. Впрочем, выбирайте сами, что для вас легче: решать непростую систему уравнений или разыскивать систему отсчета, в которой сразу можно указать направление неизвестной скорости.

ТАЙНА ЛУННЫХ НЕДР

И.Акулич

...внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного.

Я.Гашек. Похождения хравого солдата Швейка

Как-то в Солнечном городе состоялся жаркий диспут между известным ученым Знашкой и профессором Звездочкинским (подробности – в романе-сказке Н.Носова «Незнайка на Луне»). Спор шел о строении Луны. Знайка утверждал, что Луна – это полый шар, вроде резинового мяча. По мнению же Звездочкина, Луна – это шар, внутри которого имеется другой шар, окруженный прослойкой из воздуха или какого-нибудь другого газа (иначе говоря, это оболочка, внутри которой концентрично с ней расположен внутренний шар).

Впоследствии Незнайка угнал космический корабль и убедился в правоте профессора, проникнув на поверхность внутреннего шара и обнаружив, что условия там практически точь-в-точь такие же, как на нашей матушке-Земле (только освещение вместо Солнца обеспечивала внутренняя поверхность оболочки, испускавшая свет под действием космических излучений).

Оказывается, если принять симпатичную модель Звездочкина за истину, то это дает нам все основания сделать вывод о существовании на Луне неизвестных нам веществ, возможно с весьма ценными свойствами. И вот какие соображения наводят на такую мысль.

Если бы радиус внутреннего шара был близок к радиусу оболочки, то ускорения силы тяжести, создаваемой шаром на его собственной поверхности и на поверхности оболочки, были бы близки между собой. Но мы-то знаем, что на поверхности Луны это ускорение в шесть раз меньше, чем на поверхности Земли. А на поверхности внутреннего шара оно, как убедился Незнайка, совпадает с земным. Следовательно, радиус шара должен быть существенно меньше, чем радиус оболочки. А тогда для создания на его поверхности ускорения, равного земному, средняя плотность шара должна многократно превосходить среднюю плот-

ность Земли, которая, согласно справочникам, близка к $5,5 \text{ г/см}^3$.

Давайте оценим минимально возможную среднюю плотность внутреннего лунного шара. Введем следующие обозначения: $R_0 = 1700 \text{ км} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ м}$ – наружный радиус оболочки Луны (по справочнику); $R_{\text{ш}}$ – радиус внутреннего шара; d – толщина оболочки; ρ_0 – средняя плотность вещества оболочки; $\rho_{\text{ш}}$ – средняя плотность вещества шара; $g_{\text{ш}} = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести на поверхности шара (как на Земле); $g_0 = g_{\text{ш}}/6$ – ускорение силы тяжести на поверхности оболочки.

Как известно из закона всемирного тяготения, шар радиусом r и плотностью ρ создает на расстоянии $R \geq r$ от его центра ускорение поля тяготения, равное

$$a = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho \frac{r^3}{R^2}, \quad (1)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – гравитационная постоянная, $M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ – масса шара. В частности, на поверхности шара, при $R = r$, это ускорение равно

$$g = \frac{4}{3} \pi G \rho r. \quad (2)$$

Тогда для внутреннего лунного шара получаем

$$g_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} R_{\text{ш}} \quad (3)$$

(поскольку сферическая оболочка не создает внутри себя гравитационного поля).

На поверхности Луны ускорение силы тяжести равно сумме ускорений от действия двух гравитационных полей, создаваемых шаром и оболочкой (тяготением, создаваемым массой газовой прослойки между оболочкой и шаром, конечно, можно пренебречь). С шаром вопросов нет, а для определения действия оболочки надо либо найти массу оболочки (учитывая ее толщину d), либо просто представить создаваемое ею ускорение как разность ускорений, создаваемых двумя шарами – радиусами R_0 и $(R_0 - d)$. Тогда, используя формулы (1) и (2), можно записать

$$g_0 = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_0 R_0 - \frac{4}{3} \pi G \rho_0 \frac{(R_0 - d)^3}{R_0^2} \right) + \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} \frac{R_{\text{ш}}^3}{R_0^2}. \quad (4)$$

Здесь слагаемое в скобках – ускорение, создаваемое оболочкой

(представленное, как было сказано, в виде разности), а второе слагаемое – ускорение, создаваемое шаром. Так как $g_o = \frac{1}{6} g_{\text{ш}}$, то из равенств (3) и (4) следует

$$\frac{4}{3} \pi G \rho_o R_o - \frac{4}{3} \pi G \rho_o \frac{(R_o - d)^3}{R_o^2} + \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} \frac{R_{\text{ш}}^3}{R_o^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} R_{\text{ш}}.$$

Сократив на $\frac{4}{3} \pi G$ и поделив обе части равенства на $\rho_{\text{ш}} R_o$, получаем

$$\frac{\rho_o}{\rho_{\text{ш}}} - \frac{\rho_o}{\rho_{\text{ш}}} \left(\frac{R_o - d}{R_o} \right)^3 + \left(\frac{R_{\text{ш}}}{R_o} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{R_{\text{ш}}}{R_o},$$

или

$$\left(\frac{R_{\text{ш}}}{R_o} \right)^3 - \frac{1}{6} \frac{R_{\text{ш}}}{R_o} + \frac{\rho_o}{\rho_{\text{ш}}} \left(1 - \left(\frac{R_o - d}{R_o} \right)^3 \right) = 0.$$

Отсюда можно найти максимально возможное значение $R_{\text{ш}}$.

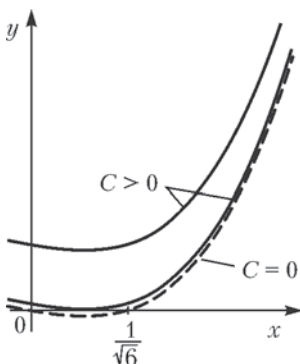
Обозначим $x = \frac{R_{\text{ш}}}{R_o}$ (очевидно, что $0 < x < 1$) и

$$C = \frac{\rho_o}{\rho_{\text{ш}}} \left(1 - \left(\frac{R_o - d}{R_o} \right)^3 \right) \quad (\text{понятно, что } C > 0). \quad \text{Тогда имеем}$$

$$x^3 - \frac{1}{6} x + C = 0.$$

Какие значения может принимать решение этого уравнения на интервале $(0; 1)$ при различных положительных значениях параметра C ? Для ответа на этот вопрос изобразим график функции

$$y = x^3 - \frac{1}{6} x + C$$



сначала при $C = 0$, а затем – при некоторых $C > 0$ (см. рисунок). Легко подсчитать, что при $C = 0$ имеются 2 корня: $x = 0$ и $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Далее с ростом C корни, как видно, начинают сближаться (большой – уменьшается, меньший – увеличивается), затем при некотором значении C они сольются (график коснется оси абсцисс), а при последующих значениях C корней вообще не будет

(но эту возможность мы не рассматриваем, поскольку корень *должен* существовать – приключения Незнайки тому подтверждение!). Отсюда можно сделать вывод: поскольку $C > 0$,

то в любом случае $x < \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда

$$R_{\text{ш}} = xR_0 < \frac{R_0}{\sqrt{6}} = \frac{1,7 \cdot 10^6 \text{ м}}{\sqrt{6}} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Теперь из выражения (3) можно получить

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ш}} &= \frac{3g_{\text{ш}}}{4\pi G R_{\text{ш}}} > \frac{3 \cdot 9,8}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,7 \cdot 10^6} \text{ кг/м}^3 = \\ &= 50,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 50,1 \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

Итак, плотность внутреннего шара превосходит 50 г/см^3 . На Земле не найдено пока ни одного вещества с такой неимоверной плотностью (у самого тяжелого вещества осмия плотность чуть выше $22,5 \text{ г/см}^3$, у остальных – еще меньше). Не исключено, что некоторые элементы из самой нижней части таблицы Менделеева и обладают такой плотностью, но они сплошь неустойчивы и «живут», в основном, доли секунды. Луна же существует миллионы лет!

Стало быть, на Луне (точнее – в ее внутреннем шаре) должны присутствовать (и в немалых количествах) неизвестные вещества. Интересно было бы узнать о них подробнее...

ОРАЛО И КРЫЛО

В.Вышинский, А.Стасенко

*Долго, в течение многих кругов обращения солнца,
Жизнь проводил человек, скитаясь, как дикие звери,
Твердой рукой никто не работал изогнутым плугом
...*

Тит Лукреций Кар. О природе вещей

Однако, наступило-таки время, когда «изогнутый плуг» пришел на поля. Его древнейшие формы известны по египетским и вавилонским изображениям, по рисункам на скалах в северной Италии и южной Швеции, относящимся ко второму тысячелетию до н.э., по изображениям на греческих вазах середины первого тысячелетия до н.э. ... В русских былинах он называется *ра́ло* или *ора́ло*, так что понятен смысл слов «брет в поле пахарь» (не путать оратая с оратором, а пашню с ораторией!).

А крыло получило широкое распространение совсем недавно — как сказал бы физик, порядка сотни лет назад.

Плуги и крылья бывают разные. Известны, например, современные плуги — общего назначения и специального (кустарниково-болотные, садовые, виноградниковые); лушительники и плантажные: лемешные и дисковые, с правооборачивающими и левооборачивающими корпусами. А крылья встречаются прямые, эллиптические, стреловидные, треугольные и даже с продольной кривой (вспомним «изогнутый плуг» у Лукреция).

Но что общего у плуга и крыла? Прежде всего — взаимодействие со средой. А при этом, разумеется, возникает *сила взаимодействия*. Эту силу разумно представить в виде двух взаимно перпендикулярных векторов: силы сопротивления, направленной против вектора скорости, и подъемной силы (ради которой и изобрели крыло), направленной перпендикулярно скорости.

Во многих классических задачах предлагается считать, что сила сопротивления среды движущемуся в ней телу пропорциональна первой степени скорости движения, Это так называемое

вязкое сопротивление. Для микробов, движущихся в воде, эта сила вязкого трения весьма существенна: если микроб перестанет двигаться, он тормозится на характерном расстоянии порядка размеров самого микроба, т.е. почти мгновенно. Вязкое трение определяет и поверхностное трение корпуса самолета, связанное с пограничным воздушным слоем, толщина которого много меньше размеров самолета.

Но для самолета еще большую роль играет *аэродинамическая сила* лобового сопротивления F_a , пропорциональная плотности воздуха ρ , квадрату скорости движения тела относительно воздуха v и площади поперечного сечения тела S :

$$F_a \sim \rho v^2 S.$$

Проверим, по крайней мере, ее размерность:

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

А вот для бруска, лежащего на шероховатой поверхности, важна сила *сухого трения*. В принципе, она тоже зависит от скорости: в начале движения из состояния покоя она максимальна, обозначим ее F_0 , а в установившемся режиме немного уменьшается, но чаще всего ее считают постоянной.

Оказывается, в теории плуга важны все перечисленные силы:

$$F = F_0 + av + bv^2,$$

где a и b – некоторые коэффициенты. Отсюда видно, что на первых порах нужна сила, которая позволяет сдвинуть плуг из состояния покоя (когда $v = 0$); затем, при небольших скоростях (когда квадрат скорости еще пренебрежимо мал), «включается» вязкое сопротивление; наконец, когда скорость движения становится значительной, последнее слагаемое (аэродинамическая сила) оказывается определяющим. На рисунке 1 изображена

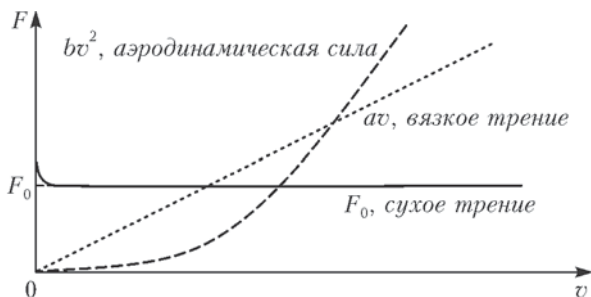


Рис. 1. Зависимость сил сопротивления от скорости плуга

качественная зависимость каждой из этих сил от скорости движения, при желании вы можете нарисовать и их сумму.

(А не вспомнить ли еще и токарный резец, вспарывающей металл в виде спиральной стружки? Но, не все сразу.)

Заметим, что приведенные здесь зависимости не являются точными законами физики, а представляют собой феноменологические выражения, основанные на опыте и приближенно описывающие сопротивление в некоторых диапазонах скоростей.

Но, разумеется, и плуг и крыло служат вовсе не для того, чтобы испытывать сопротивление.

Классический плуг должен перевернуть пласт земли, но для этого его нужно приподнять на некоторую высоту – как тут не вспомнить потенциальную энергию mgh . Когда перевернутый пласт чернозема шлепается за плугом, вся его потенциальная энергия и энергия трения вращения переходят в тепло (рассеиваются).

А крыло имеет задачу создать подъемную силу, т.е. поток импульса воздуха, направленный вниз и равный весу самолета. Однако на место отброшенного вниз воздуха поступает сверху новая порция – вот и возникают два индуцируемых, «присоединенных» вихря, которые тянутся за самолетом от самого момента взлета. В результате при полете в атмосфере «платой» за создание подъемной силы является возникновение еще так называемого *индуктивного сопротивления* $F_{\text{и}}$. Для горизонтального полета (когда подъемная сила равна весу) полное сопротивление равно

$$F_{\text{полн}} = F_{\text{а}} + F_{\text{и}} = cv^2 + \frac{d}{v^2},$$

где c и d – некоторые коэффициенты (рис.2). Чем медленнее летит самолет, тем меньше его лобовое сопротивление и вязкое

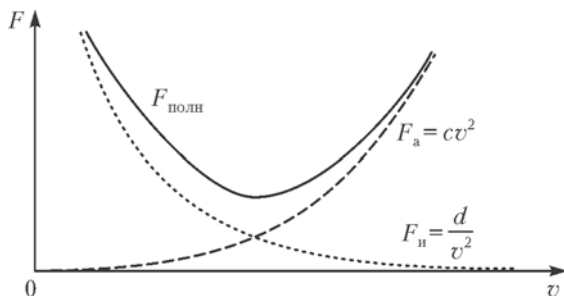


Рис. 2. Зависимость полного сопротивления от скорости самолета

трение (ведь они пропорциональны v^2 и v соответственно), но тем мощнее должен быть присоединенный вихрь. Вот и получается, что плата за создание подъемной силы неподвижным крылом ($v \rightarrow 0$) становится непомерной: $F_{\text{полн}} \rightarrow \infty$.

Куда же уходит затраченная энергия? Она формирует вихревой след и рано или поздно возвращается в атмосферу. «Пахари неба» — так иногда называют самолеты. Они «пахнут небо», чтобы взросли всходы радости от встреч между людьми на земле. На рисунке 3 показана визуализация вихревого следа самолета

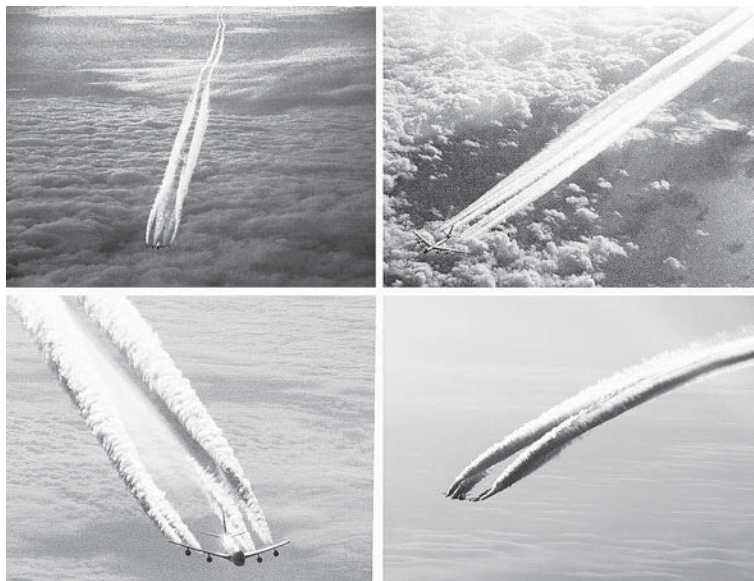


Рис. 3. Вихревые следы за самолетом

либо за счет конденсации паров воды, либо при помощи специальных «дымарей». Как это похоже на борозду за плугом в чистом поле! Ведь если плуг переворачивает (т.е. вращает) пласт земли, то при этом тоже возникает циркуляция скорости пласта. Только в случае плуга эта циркуляция после переворота исчезает, а за самолетом закрученные массы воздуха вращаются несколько минут, постоянно затухая и «растворяясь» в турбулентных пульсациях атмосферы.

А еще сила взаимодействия крыла и среды зависит от угла атаки α — угла между направлением скорости набегающего потока и плоскостью крыла (рис.4). Этот угол как раз и входит в коэффициенты, написанные выше. Для самолета этот угол

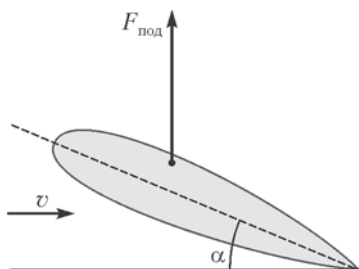


Рис. 4. Положительный угол атаки, при котором создается подъемная сила крыла $F_{\text{под}}$

принятого решения. Поэтому, не колеблясь, поступайте на факультет аэродинамики и летательной техники Московского физико-технического института (МФТИ), где вы узнаете, по крайней мере, все о крыле. Правда, не скроем: учиться здесь нелегко. Как говорят студенты, «пахать надо!»

имеет положительный знак, для плуга — очевидно, отрицательный, чтобы плуг не всплывал, а зарывался в землю. Впрочем — лишь до нужной глубины, а иначе оратаю придется налегать на него всем своим весом.

Наконец, вспомним древнюю мудрость, идущую из Евангелия: «возложивши длань (руку) на рало, не оглядываясь вспять (назад)». Это равносильно призыву не изменять

КАПЛИ, ПУЗЫРИ И ДИРИЖАБЛИ

А.Стасенко

Ну какой же читатель не наблюдал, как падают вниз капли дождя, а пузырьки в газированной воде всплывают вверх? Однако капли масла в воде или стальные шарики в ртути отнюдь не «падают», а всплывают. Ясно, что здесь играет роль знак разности плотностей окружающей среды и погруженного в нее тела, о чем, собственно, и говорит закон Архимеда. Этот закон «работает» всюду: подводная лодка или корабль – это «пузырьки» в воде или на ее поверхности; воздушный шар, наполненный горячим воздухом, – это «пузырек» в более холодной атмосфере.

А в технике используется процесс, красиво называемый «флотацией»: в воду засыпают смесь измельченной руды и пустой породы и продувают снизу воздух. Более легкая порода прилипает к пузырькам, увлекается ими вверх и легко удаляется из смеси, а более тяжелые частицы металла остаются внизу.

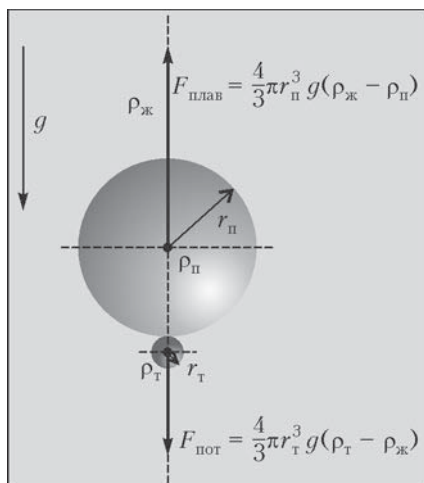


Схема флотации

Теперь – немножко подробнее. Обозначим через $\rho_{\text{п}}$, $\rho_{\text{ж}}$, $\rho_{\text{т}}$ плотность газа в пузырьке, плотности жидкости и твердого тела соответственно. Легко написать условие, при котором сила плавучести пузырька начнет превосходить силу потопления, действующую на прилипший шарик твердого вещества (см. рисунок):

$$\frac{4}{3}\pi r_{\text{п}}^3 g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) \geq \frac{4}{3}\pi r_{\text{т}}^3 g(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}).$$

(Понятно, что тут кое-что можно сократить.) Учитывая, что значения ρ_r для полезной руды и бесполезной пустой породы различны, из этого условия можно подобрать такие значения степени измельчения (т.е. r_t) твердых веществ и размеры пузырьков ($r_{п}$), при которых флотация станет эффективной.

Но пусть скорость всплывания пузырьков или падения частиц уже достигла установившегося значения. Ясно, что при этом нужно учесть еще и силу сопротивления среды. Очевидно, эта сила должна зависеть от скорости движения v , размеров тела, например радиуса r , и плотности ρ окружающей среды, сопротивляющейся движению тела. Из соображений размерности можно написать единственную комбинацию этих величин, имеющую размерность силы, а именно $\rho r^2 v^2$. В гидро- и газодинамике принято эту силу писать в виде

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -C \cdot \frac{1}{2} \rho \pi r^2 v \vec{v}.$$

(Знак минус указывает на то, что вектор силы противоположен вектору скорости.) Здесь вполне разумно выделена площадь поперечного сечения πr^2 , а C – это так называемый коэффициент сопротивления. Вопросом о том, каким может быть этот коэффициент, интересовался еще великий Ньютон, и из его соображений следует, что для шара $C \approx 1/2$.

Приравнивая друг другу силы плавучести и сопротивления, для установившейся скорости движения шара плотностью $\rho_{ш}$ в среде с плотностью $\rho_{ср}$ получим

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} g r \left| \frac{\rho_{ш}}{\rho_{ср}} - 1 \right|}.$$

Например, для капли воды, $\rho_{\text{вод}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$, радиусом $r = 1 \text{ мм}$ в воздухе, $\rho_{\text{возд}} = 1,25 \text{ кг/м}^3$, будем иметь

$$v_{\text{вод}} = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot \left(\frac{10^3}{1,25} - 1 \right)} = 6,5 \text{ м/с}.$$

Кстати, из выражения в скобке под знаком корня видно, что силой Архимеда для капли воды можно пренебречь. С такой примерно скоростью и падают крупные капли дождя.

А в случае движения воздушного пузырька в воде нужно в формуле для скорости поменять местами индексы «ш» и «ср» (теперь вода – окружающая среда, а воздух в пузырьке – движущееся в воде тело). И тогда видно, что, поскольку $\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \ll 1$,

этим отношением плотностей можно пренебречь по сравнению с единицей, так что основную роль теперь играет как раз сила Архимеда, а не сила тяжести пузырька. В результате получим

$$v_{\text{возд}} = \sqrt{\frac{16}{3}rg} = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 0,23 \text{ м/с} = 23 \text{ см/с}.$$

Тут нужно предупредить, что с увеличением радиуса пузырька скорость его всплывания растёт и закон сопротивления (точнее – зависимость от скорости) для шара нуждается в поправке.

Теперь рассмотрим, как достигается эта установившаяся скорость, например, для случая падения водяной капли в воздухе. Конечно, для этого придется написать уравнение второго закона Ньютона:

$$m_{\text{вод}} \vec{a}_{\text{вод}} = -\frac{1}{4}\pi r^2 \rho_{\text{возд}} v \vec{v} + m\vec{g} \left(1 - \frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \right)$$

(здесь $m_{\text{вод}}$ – масса и $\vec{a}_{\text{вод}}$ – ускорение капли). В начале движения скорость близка к нулю, и слагаемым, содержащим ее в квадрате, можно пренебречь. К тому же, учитывая, как и раньше, что $\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{вод}}} \ll 1$, для ускорения капли в воздухе в начальный момент получим

$$\vec{a}_{\text{вод}} \approx \vec{g}.$$

Великий Галилей, сбрасывая пушечные ядра с Пизанской башни, очень разумно пренебрегал и силой Архимеда, и силой сопротивления воздуха.

А вот что получим для воздушного пузырька в воде (при тех же предположениях):

$$\vec{a}_{\text{возд}} \approx -\vec{g} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}} = -\vec{g} \frac{10^3}{1,25} \approx -800 \vec{g}.$$

Это какое же тело выдержит такую перегрузку – тем более что речь идет о «мягком пузырьке»? Тут явно что-то не так. И вот что именно: мы не учли очень важное и интересное свойство движения тел в среде – наличие так называемой присоединенной массы. Дело в том, что любая попытка тела изменить свою скорость вызывает и ускорение окружающей его массы m' среды – при этом само тело становится как бы массивнее.

Еще в первом веке до нашей эры это явление образно описал римский поэт-философ Тит Лукреций Кар:

«... коль два обширные тела, столкнувшись,
 Быстро отскочат одно от другого, то воздух, конечно,
 Должен всю ту пустоту захватить, что меж них получилась;
 Но, и врываясь туда стремительным током,
 Все-таки сразу всего заполнить пространства не сможет;
 Он непременно займет сначала ближайшее место,
 Следом другое за ним, а затем уж и все остальные».

Для шара эта присоединенная масса равна половине массы окружающей среды в объеме шара, т.е.

$$m' = m \frac{\rho_{\text{среды}}/2}{\rho_{\text{шара}}}.$$

Для пузырька в воде получим

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho_{\text{вод}}/2}{\rho_{\text{возд}}} = \frac{500}{1,25} = 400$$

– пузырек в воде «тяжелее» в сотни раз при попытке изменить свою скорость! С учетом присоединенной массы ускорение воздушного пузырька в воде будет равно

$$\vec{a}_{\text{возд}} \approx \vec{g} \frac{1 - \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_{\text{возд}}}} \approx -2 \vec{g}$$

(здесь опять учтено, что $\rho_{\text{вод}}/\rho_{\text{возд}} \gg 1$). Из-за этой присоединенной массы неравномерные движения воздушного шара и дирижабля в воздухе оказываются затруднительными.

Но и это еще не все. Согласно классической гидродинамике, окружающая среда не только навязывает ускоренно движущемуся телу свою присоединенную массу в данный момент, но она «помнит» о всей предыстории его движения. Значит, тут уже дело пахивает интегралом по времени от «минус бесконечности» до данного момента. Этот интеграл так и называется «функция памяти» или сила Бассэ – по имени известного гидродинамика XIX века. А кроме того, подинтегральная функция, как говорят физики и математики, имеет особенность в знаменателе.

Так что лучше отложить это дело до вашего поступления на факультет аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ) Московского физико-технического института, где вас научат всем прелестям механики жидкости и газа.

ДЕДАЛ, ИКАР И ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА

А. Стасенко

В справочной литературе по древнегреческой мифологии упоминаются два легендарных персонажа – отец и сын:

«*Дедал* – чудесный строитель и художник, выстроивший для критского царя Миноса лабиринт – здание с бесчисленными запутанными ходами, где жил минотавр. Спасаясь от преследований Миноса за помощь, оказанную Тезею, Дедал улетел с сыном Икаром на крыльях в Сицилию».

«*Икар*, сын Дедала, улетел вместе с отцом на крыльях, скрепленных воском. Когда он слишком высоко поднялся в воздух, воск растопился и Икар упал в море, с тех пор носящее его имя – Икарийское».

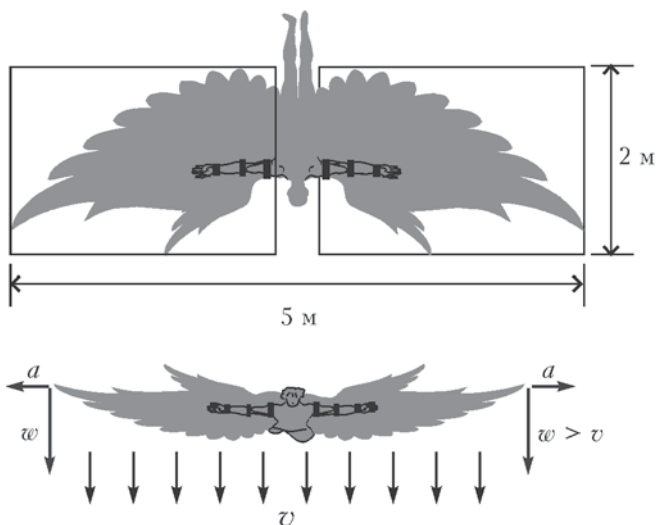
А вот как о том же поэтически сообщает Публий Овидий Назон:

Дедал и сына учил: «Полетишь серединой пространства!
Будь же послушным, Икар: коль ниже ты путь свой
направишь,
Крылья вода отягчит, коль выше – огонь обожжет их».

В результате произошло то, что бывает, когда не слушают советы старших. Но для нас эта трагедия – еще один повод поговорить о законах физики.

Начнем с того, что крито-микенская культура существовала за много веков до изобретения Архимедом винта как создателя силы тяги. Следовательно, наши воздухоплаватели – Дедал и Икар – не могли использовать пропеллер в качестве движителя при неподвижном крыле. Таким образом, это был полет на машущих крыльях – об этом говорит и указание на использование перьев, чтоб уж совсем быть похожими на птиц. И совершенно естественно, что был использован воск – ведь в те времена еще не было ни конторского клея, ни клея ПВА.

Но насколько непослушный Икар, «стремлением к небу влекомый», приблизился к Солнцу? Едва ли он мог забраться выше 10–15 километров. Но что это на фоне расстояния от Земли



до Солнца в 150 миллионов километров? Всего 10^{-10} ! Известно, что «жар Солнца», т.е. плотность потока энергии, вне атмосферы составляет 1400 Вт/м^2 , а на поверхности Земли – около 1000 Вт/м^2 , за счет рассеяния и поглощения лучистой энергии молекулами воздуха. Однако этот рост «жара Солнца» с высотой имеет серьезного конкурента: на этих высотах температура воздуха около -50°C , так что скорее Икар мог схватить ангину, чем растопится связующий крылья воск. Тогда что же могло привести к разрушению крыльев? Вот тут мы и начнем приближенные оценки порядков величин.

Чтобы обеспечить хотя бы висение в воздухе (подобно воробьям, колибри и вертолетам), машущие крылья должны создать поток импульса воздуха, направленный вниз и равный весу Икара плюс вес всей конструкции летательного аппарата:

$$mg \sim \rho S v^2$$

$$(\rho S v^2) = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} = [F].$$

Здесь v – вертикальная составляющая скорости, а в скобках мы проверили размерности всех величин, что следует делать всегда, прежде чем начинать подставлять числа. Пусть $m = 100 \text{ кг}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $S = 10 \text{ м}^2$. Последнее значение – площадь обоих крыльев Икара, которые представлены на прилагаемом рисунке

(едва ли можно человеку взмахнуть крыльями больших размеров). Тогда получим

$$v \sim \sqrt{\frac{mg}{\rho_0 S}} = \sqrt{\frac{100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2}{1 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м}^2}} = 10 \text{ м/с}$$

(здесь для характерного значения плотности воздуха у Земли принято $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$.) Но это некоторая скорость, средняя по площади сечения потока воздуха, направленного вниз. А концы крыльев, очевидно, должны иметь скорость w , большую v . Значит, центробежное ускорение, сообщаемое центробежной силой, составит

$$a_0 \sim \frac{w^2}{l/2} > \frac{10^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2,5 \text{ м}} = 40 \text{ м/с}^2,$$

где индекс «0» означает, что речь идет о полете около Земли, где летел Дедал.

А что произойдет с увеличением высоты полета? Например, если Икар оказался там, где плотность воздуха на порядок меньше, чем у поверхности, для центробежного ускорения получим

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\rho/\rho_0}} > \frac{40 \text{ м/с}^2}{\sqrt{0,1}} \approx 100 \text{ м/с}^2,$$

что на порядок выше ускорения земного тяготения. Соответствующая такому ускорению центробежная сила и могла выдергивать перья из крыльев Икара!

Тот, кто не знает, что такое центробежная сила (да простит Читатель наши подозрения), может очень просто ее *почувствовать*. Предположим, что ваш автомобиль (или рейсовый автобус) движется по кольцу дорожной развязки, все время поворачивая, например, вправо (центр вашей круговой траектории находится, конечно, справа от вас.) При этом вы почувствуете, что кто-то прижимает вас к левому борту. Вот эта сила инерции, направленная в сторону от центра кривизны вашей траектории, и называется центробежной. А можно сесть на карусель и убедиться, что эта же сила стремится отбросить вас прочь от оси.

Теперь перейдем к энергетическим соображениям. Мощность потока воздуха, направленного крыльями Икара вниз, получим, умножив поток импульса на скорость:

$$N = (\rho S v^2) v \sim mgv > 100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 10 \text{ м/с} \sim 10 \text{ кВт}.$$

Установлено, что вместе с пищей человеку физического труда нужно потреблять в сутки около 5000 ккал. Из них только

четвертая часть переходит в мышечную энергию (таков КПД человека), т.е.

$$N_0 \approx \frac{1}{4} \frac{5000 \cdot 10^3 \frac{\text{кал}}{\text{сутки}} \cdot 4,2 \frac{\text{Дж}}{\text{кал}}}{24 \frac{\text{ч}}{\text{сутки}} \cdot 3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}}} = 0,06 \text{ кВт} .$$

Значит, если бы нашим воздухоплавателям удалось хотя бы взлететь с Крита, они должны были бы принять серьезный допинг, запрещенный для употребления современными спортсменами.

К настоящему времени имеется обширная литература по теории машущего полета, которую легко раздобыть в интернете.

Впрочем, если у нашего Читателя, недовольного грубостью представленных рассуждений, возникло желание самостоятельно сделать аналогичные физические оценки и уточнить порядки величин, автор будет считать свою цель достигнутой.

О РАБОТЕ, ТОЧКЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СИЛЫ И ТОЧИЛЬНОМ КРУГЕ

В.Птушенко

*Не сила пусть рождает уважение,
А правильная точка приложенья.*

Из персидских рубайат

Понятие работы силы – одно из главных понятий механики. В школьном курсе физики в основном изучается механика материальной точки. А что нового может появиться при переходе к большим, или, как говорят физики, протяженным, телам, размерами которых уже нельзя пренебречь? На нескольких примерах постараемся показать те неожиданности, которые возникают при изучении работы сил над протяженными телами.

При встрече с любой физической задачей очень важно понимать те приближения и допущения, которые делаются для упрощения ее решения. Часто эти допущения скрыты в обычных словах, усыпляя нашу физическую бдительность. Поэтому будем обращать на них особое внимание.

Начнем с простейшей задачи. Идя по зимнему лесу, вы тащите за собой на санках товарища. Дорога ровная, прямая, горизонтальная, утоптанная, коэффициент трения μ между полозьями и снегом постоянный. Тащите санки вы далеко, ну скажем с полкилометра, и не меняете при этом темпа. Как найти работу, которую вы совершаете? Переводя все сказанное о дороге и вашем движении по ней на физический язык, легко увидеть, что речь идет о прямолинейном равномерном движении материальной точки, на которую действуют постоянная сила трения скольжения

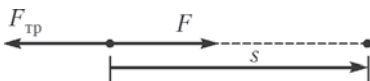


Рис. 1

$\vec{F}_{\text{тр}}$ и компенсирующая ее сила \vec{F} , с которой вы тянете санки (рис.1). Совершаемая вами работа против силы трения равна

$$A = (\vec{F} \cdot \vec{s}) = FS = F_{\text{тр}}s = \mu mgs ,$$

где s – пройденный вами путь, m – масса вашего товарища вместе с санками.

Будем понемногу менять условия. Что изменится, если вы захотите узнать совершенную вами работу не на всем пути, а за несколько первых шагов? Тогда санки уже нельзя рассматривать как материальную точку – их собственные размеры сопоставимы с величиной перемещения. Но если санки движутся поступательно, в самом решении ничего не изменится, и мы получим $A = \mu mgs$. Единственное, что здесь несколько иное по сравнению с первой задачей, это смысл величины s : теперь это уже не перемещение материальной точки, а перемещение твердого тела (санок) при его поступательном движении. Это изменение пока выглядит не слишком существенным, однако в дальнейшем оно окажется более значительным, так что обратим на него внимание.

Итак, мы отказались от одного условия – малости системы, но вместо него появились два новых: твердость тела и поступательность его движения. Попробуем по очереди отказаться и от каждого из них.

Для начала привяжем к нашим санкам не веревку, а резиновый жгут – эспандер. Взявшись за кольцо эспандера, вы

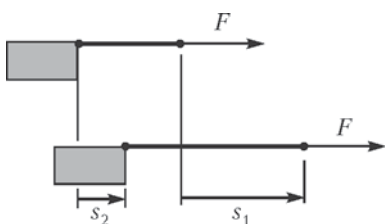


Рис. 2

проходите с ним, например, $s_1 = 5$ м, а его другой конец – который привязан к санкам – перемещается при этом всего на $s_2 = 3$ м (рис.2). Как же здесь найти работу? На какое из этих двух перемещений умножать силу?

А это зависит от того, какую работу вы ищите. Если вас интересует работа, которую вы совершили над всей системой «эспандер-санки», то нужно брать перемещение той части эспандера, за которую держались вы (5 м в нашем случае). Если же эспандер вы в систему не включаете и интересуетесь только работой, совершенной над санками, то и под перемещением следует понимать перемещение только самих санок (3 м). Работы получаются разными, поскольку часть энергии (равная разности работ) запасается в эспандере. В нерастяжимой веревке (а при неравномерном движении важно еще, чтобы веревка была и невесомой) энергия не запасалась, поэтому и работы не различались (независимо от того, включали бы мы веревку в систему или нет).

Ну, а если система более сложная и не разделяется так легко на подсистемы? Если все ее части деформируемы, а сил на нее действует много? Принцип решения остается тем же самым:

- прежде всего необходимо выделить ту систему (или ее часть), которая вас интересует (рис.3);

- затем нужно указать все внешние по отношению к этой системе силы — их величины и точки приложения;

- наконец, для каждой такой силы следует вычислить скалярное произведение силы на *перемещение ее точки приложения*; сумма всех таких произведений и даст полную работу всех внешних сил над вашей системой.

Может оказаться, что точек приложения внешних сил, действующих на систему, бесконечно много. Например, мыльная пленка, натянутая на рамку, стягивает ее, действуя каждым элементом своей границы на какой-то элемент рамки. Соответственно, по третьему закону Ньютона, на каждый элемент границы мыльной пленки действует сила со стороны рамки. Если вы растянете рамку, то все это бесконечное множество сил, действующих по границе пленки, совершит работу, в сумме равную $A = 2\sigma\Delta S$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, образующей пленку, ΔS — изменение общей площади пленки в результате проделанных вами изменений размеров и формы рамки (докажите это самостоятельно).

Теперь попробуем отказаться от поступательного движения. Оставим пока санки в покое и постараемся поднять бревно, лежащее у нас на пути. Будем поднимать бревно за один конец (другой неподвижно лежит на земле), усилие наше направим вертикально вверх (рис.4). Разные части бревна при таком

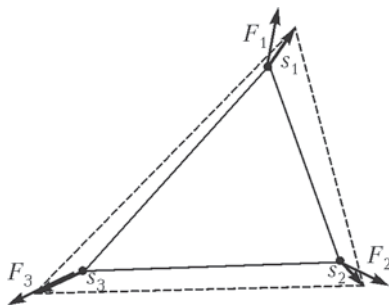


Рис. 3

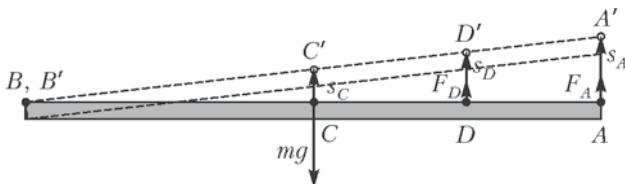


Рис. 4

движении, конечно, переместятся неодинаково. Каким же перемещением определяется совершаемая нами работа? Разумеется, перемещением \vec{s}_A точки приложения нашей с вами силы – в данном случае конца бревна. Если ваш товарищ попытается помочь вам, подхватив бревно рядом, например в точке D , то для определения совершаемой им работы нужно будет взять перемещение \vec{s}_D точки приложения его силы.

А сила тяжести? Как найти ее работу? Она ведь приложена к каждому элементу бревна, и у каждого из них свое перемещение. Однако если просуммировать все работы сил тяжести, приложенных к каждому такому элементу, то получится весьма простой и хорошо известный результат: $A_{\text{тяж}} = (m\vec{g} \cdot \vec{s}_{\text{ц.тяж.}}) = mgs_C$, т.е. работа равна произведению силы тяжести всего бревна на перемещение его центра тяжести.

Таким образом, мы видим, что если не все части тела совершают одинаковые перемещения (тело деформируемое или движется не поступательно), то в формуле $A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$ в качестве \vec{s} нужно использовать перемещение *точки приложения силы* \vec{F} .

А теперь взглянем на самую запутанную ситуацию: что будет, если точка приложения силы *движется по поверхности тела*? Такая ситуация может возникнуть во многих случаях: тормозные колодки, останавливающие вращение колеса; резец токарного станка, подведенный к вращающейся детали; лезвие ножа, приложенное к точильному кругу...

Посмотрим повнимательнее на точильный круг. Когда вы касаетесь его ножом, то между ножом и кругом возникает сила трения, однако точка приложения силы остается все время на одном и том же месте, она не движется! А раз перемещение точки приложения силы равно нулю за любой промежуток времени, то должна быть равна нулю и совершаемая этой силой работа. Но ведь круг, когда вы прижимаете к нему нож, постепенно замедляет вращение, теряет свою кинетическую энергию, а значит, над ним совершается какая-то ненулевая работа.

Бывает и наоборот: точка приложения силы движется, а работа при этом не совершается. Именно так происходит, например, при скатывании колеса с наклонной плоскости без проскальзывания (рис.5). Сила трения, возникающая между колесом и плоскостью, приложена к точке их мгновенного касания (точка A на рисунке 5), которая движется вместе с колесом вниз вдоль плоскости. Тем не менее, несмотря на то что скалярное произведение силы трения и перемещения ее точки приложения

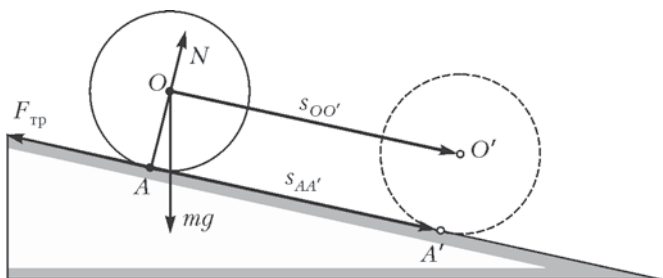


Рис. 5

не равно нулю, никакой работы эта сила не совершает, а все изменение кинетической энергии колеса к концу горки целиком происходит за счет работы силы тяжести.

Почему же так получилось? Физическая интуиция нам подсказывает, что мы не на то смотрели, т.е. не на ту точку, и потому не тот смысл вложили в величину перемещения \vec{s} . Как только *точка приложения силы* стала «путешествовать» по телу, оказалось, что в этом понятии есть несколько разных смыслов. С одной стороны, это точка *пространства*, в которой в данный момент происходит контакт двух тел, приводящий к возникновению силы. С другой стороны, это точка *тела*, оказавшаяся в этот момент в месте контакта. Разумеется, в каждый момент времени они совпадают друг с другом, находятся в одном и том же месте, но при этом двигаться они могут по-разному!

В случае с ножом и точильным кругом точка их контакта остается постоянно в одной и той же точке пространства (т.е. она неподвижна), в то время как каждая точка-элемент точильного круга, с которой происходит контакт, движется. И движение именно ее – физической, материальной точки – и должно быть принято во внимание при определении работы над кругом. Есть, кстати, еще и третья точка – точка-элемент ножа, которая контактирует с кругом и создает действующую на него силу. Если нам потребуется найти работу, производимую над ножом точильным кругом, то именно ее (этой точки-элемента ножа) движение придется для этого учитывать. В данном случае она тоже неподвижна, поэтому и механическая работа, совершаемая над ножом, равна нулю (нож, если мы его держим крепко, остается на месте, т.е. не меняет свою кинетическую энергию).

Итак, физическая интуиция подсказала нам верный путь – учитывать движение точки тела. Но как это сделать? В определение работы ($A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$) входит перемещение, поэтому, чтобы найти элементарную работу силы над материальной точкой,

необходимо определить перемещение этой точки. А какие перемещения совершают точки точильного круга в момент их прохождения через точку контакта с ножом? В том-то и дело, что никакие! Ведь уже в следующий момент времени точка точильного круга перестает быть точкой приложения силы. *Ни для одной точки точильного круга не существует ни одного конечного участка пути, на котором она оставалась бы точкой приложения силы.* Иными словами, само понятие перемещения, входящее в определение работы, теряет смысл, когда точка приложения силы начинает перемещаться по телу. Как же преодолеть это затруднение?

Тут может быть много разных путей. Один из них – понять, почему мы пришли к такой ситуации, когда теряют смысл самые обычные, казалось бы, понятия. Да потому, что мы представили себе контакт двух тел *точечным*, бесконечно маленьким. Разумеется, это лишь приближенное представление о физической реальности. Во многих случаях оно оказывается совершенно достаточным для понимания сути явления и его правильного описания, но здесь оно подвело нас. Благодаря тому что два тела касаются друг друга и создают силу не в точке, а на *конечной* (хотя, возможно, и очень маленькой) *площади*, каждый принадлежащий ей элемент тела успевает пройти какой-то конечный путь под действием силы. Сила успевает совершить над ним работу. Из этих – пусть маленьких, но все же уже ненулевых – величин и может складываться работа, совершаемая над телом.

Таким образом, чтобы аккуратно, последовательно учесть в расчете работы движение материальных точек тела, можно отказаться от упрощенного представления о точечном контакте взаимодействующих тел, рассмотреть движение всех точек в области контакта и найти суммарную работу. Этот путь не так уж сложен, как кажется, – в конечном итоге он даст результат, не зависящий от размеров и каких-либо особенностей области контакта тел. (Иными словами, рассмотренная нами конечная область контакта важна для физически осмысленного описания процесса совершения работы, но не важна для конечного результата.)

Но что делать, если мы не хотим задумываться о протяженности области контакта двух тел? Есть ли здесь какие-то обходные пути, которые позволили бы нам решить задачу, ни на минуту не отказываясь от удобной модели точечного контакта? Да, есть. Понятие перемещения доставило нам столько неудобств потому, что оно, по своему смыслу, описывает процесс *на*

промежутке. Вот если бы вместо него найти такую величину, которая бы описывала величину *в точке*...

А что если попробовать взять не перемещение точки тела, а ее скорость и умножить силу, действующую на точку, на эту скорость? Да ведь это же мощность!

Получается, что работу над точкой тела, становящейся лишь на миг точкой приложения силы, мы формально найти не можем, но вот найти мощность, развиваемую силой, действующей на точку, – пожалуйста. А умножив мощность на нужный промежуток времени, мы как раз и получим работу!

Конечно, это не единственный возможный вариант, как обойтись с «непослушной» работой в таком непростом явлении, как действие на тело силы со скользящей точкой приложения. Попробуйте придумать свой способ, который, возможно, покажется вам удобнее.

ДВА СЛОВА О КОЛОДЦЕ (И НЕ ТОЛЬКО О НЕМ)

С. Дворянинов

*Спой мне песню, как синица
Тихо за морем жила;
Спой мне песню, как девица
За водой поутру шла.*

А.С.Пушкин

Слово первое – «журавль»

В древние времена люди брали воду из рек или озер. Потом появились колодцы. Колодец – это прежде всего глубокая яма. Глубокая – чтобы до водоносного слоя добраться. Так называемый водоносный горизонт может быть любым. Далее, внутри колодца устанавливается деревянный сруб. Он препятствует осыпанию земли. На Руси возле неглубоких колодцев ставили «журавль» (рис.1). Он состоит из трех частей: это врытый в землю столб, рычаг-коромысло с грузом-противовесом на одном конце и шест, укрепленный на другом конце. На шесте



Рис. 1

имеется крючок, на котором закреплено ведро. Качается коромысло туда-сюда, словно кланяется, и своим длинным «клювом» достает наверх водицу – и людям, и скотине домашней, и чтобы огород полить, и для бани. А издали посмотреть – так и есть птица-журавль, стоящая на одной ноге и пьющая воду. Представьте: бескрайняя степь, и нет ничего кругом выше поднятой шеи журавля-колодца...

Пришли эти колодцы к нам из стран Востока и Древнего Египта. Там они наряду с каналами, плотинами и шлюзами были элементами ирригационной системы и поднимали воду на поля.

А теперь вопрос: для чего надо было заготавливать столб для колодца – пилить в лесу дерево, везти его ствол на место и вкапывать рядом с колодцем? Да еще крепить наверху коромысло, а к нему – шест? К чему такая сложная конструкция? Не проще ли лишь иметь веревку, на ней опустить в колодец ведро, зачерпнуть воду и поднять ведро наверх?

Легче ответить на эти вопросы тому, у кого есть хотя бы минимальный соответствующий жизненный опыт. Но часто ли современному городскому школьнику приходится тянуть или удерживать в руках веревку? Здесь может помочь художественная литература, а альпинисты наверняка вспомнят слова «Песни о друге» В.Высоцкого:

А когда ты упал со скал,
Он стонал, но держал...

Альпинисты всегда идут в связке – каждый в цепочке связан с другими специальной веревкой. Она спасает при падении. Держать веревку, точнее груз на веревке, тяжело, неудобно, некомфортно. Да и опасно, особенно малому ребенку, – у колодца тяжелое ведро может перетянуть. Так что и не пошлешь мальчика к такому колодцу за водой. А к труду раньше приучали в народе сызмальства.

Сейчас мы убедимся, что набирать воду из колодца-журавля и удобно, и безопасно, и даже ребенку по силам. Оказывается, наши предки и в старину уже знали закон сохранения энергии – по крайней мере, эффективно использовали его на деле.

Итак, мы подходим к «журавлю». Груз-противовес перетянул шест с пустым ведром, поэтому он лежит на земле, а ведро находится в воздухе и чуть качается на ветру. Мы начинаем перебирать шест руками, опуская его вниз. Фактически мы поднимаемся на этом шесте, точнее – пытаемся подняться. Получается, как бег на месте – так и подъем на месте. Наш собственный вес больше веса груза-противовеса, и потому мы

потихоньку поднимаем его вверх. (Обратите внимание, насколько физиологично это физическое упражнение: никакой нагрузки на позвоночник!) Наконец, цель достигнута: ведро опустилось в воду. В этот момент мы перестаем тянуть шест вниз. Груз-противовес оказался наверху, и теперь он перетягивает ведро. Груз начинает опускаться вниз, а ведро – подниматься вверх. На этом этапе нам следует даже чуть притормаживать шест руками, чтоб ведро не слишком быстро разгонялось. Минута, да что там – всего несколько секунд, и ведро оказывается у нас в руках, точнее – стоящим на краю сруба. Пожалуйста, можно испить студеной колодезной воды (летом) или же пойти поставить самовар (зимой).

В некоторой степени «журавль» напоминает неподвижный ворот, который служит для изменения направления действия силы. Но неподвижный ворот не накапливает потенциальную энергию, а «журавль» – накапливает, сохраняет. Это, безусловно, более сложный механизм. Заметим еще, что иногда вместо шеста использовали веревку. Тогда физические усилия человека были направлены на подтягивание на этой веревке (подобно подтягиванию на канате в спортзале). Ясно, что и это подтягивание происходит на месте. Так что когда увидите колодец-журавль – вспомните и правило рычага, и закон сохранения энергии!

Слово второе – коловорот

Однако если колодец глубокий, то требуются и шест длинный – чтобы с земли до воды доставал, и столб высокий – чтобы обеспечивал необходимый размах коромысла. Кроме того, длинный шест, который движется не по вертикальной прямой, в колодец может и не войти – застрянет. В этом случае используют колодец с воротом, или коловоротом.

Словари определяют слово «коловорот» как круговорот, круговое вращение, инструмент для сверления. В природе коловорот по народному поверью происходит 21 декабря, в день зимнего солнцестояния, когда солнце поворачивает с зимы на лето и день начинает прибывать.

В колодцах с коловоротом на крепкое дубовое бревно – закрепленный горизонтально цилиндр с радиусом основания R – наматывается металлическая цепь (рис.2). Бревно вращают с помощью изогнутой ручки – собственно коловорота. На рисунке он изображен отрезком OA , длина которого L . Для подъема ведра с водой из колодца коловорот следует вращать по часовой стрелке.

Силу мы прикладываем в точке A , а каким должно быть ее направление? Точнее, каким оно должно быть, если мы хотим обойтись самой малой силой и не тратить ее попусту – не прикладывать ее по тем направлениям, вдоль которых работа не совершается?

Ответ очевиден. Направление силы должно быть переменным, но всякий раз совпадающим с касательной к окружности в переменной точке A . Стало быть, при одном положении коловорота человек должен «виснуть» на ручке, при другом – толкать ее от себя вверх, но в обоих случаях сила направлена вертикально. В другие моменты следует ручку тянуть к себе или толкать от себя – в эти моменты сила направлена по горизонтали. Есть еще много промежуточных направлений.

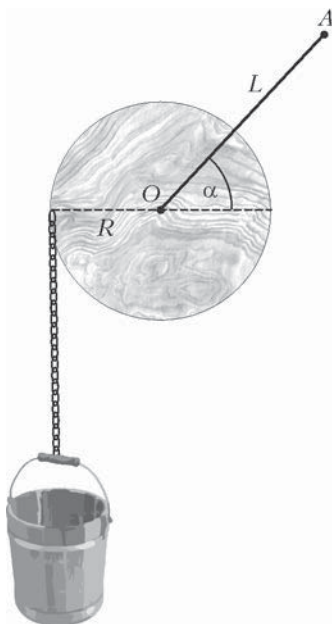


Рис. 2

Устойчивость идеального ворота. Сейчас мы сосредоточимся на описании именно этого явления – устойчивости – с помощью идеального модельного устройства. Идеального потому, что будем считать цепь невесомой.

Итак, мы подходим к колодцу. С одной стороны ворота на короткой цепи (теперь лучше сказать – на нити) висит пустое ведро массой m . Его уравнивает ручка, расположенная в этот момент с другой стороны. Система находится в покое. Условием равновесия системы является равенство моментов сил

$$mgR = MgL \cos \alpha,$$

где M – масса ручки, которая для простоты вся сосредоточена в точке A , α – угол отклонения ручки от горизонтали, $L \cos \alpha$ – плечо силы тяжести рычага-ручки. Решая полученное уравнение относительно угла α , $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, найдем два значения:

$$\alpha = \pm \arccos \frac{mR}{ML}.$$

Оказывается, они соответствуют двум положениям равновесия системы – неустойчивому и устойчивому.

Пусть рычаг находится в верхнем положении $\alpha = \alpha_+$. Выведем рычаг из этого положения, например поднимем его чуть вверх. В результате правое плечо уменьшится, правый момент сил тоже уменьшится. Левое плечо остается неизменным – оно всегда равно R . Ведро будет перевешивать ручку, и потому рычаг начнет подниматься вверх, вращаясь против часовой стрелки. Стало быть, система будет удаляться от исходного положения $\alpha = \alpha_+$. Это признак неустойчивости. Если же рычаг из исходного положения чуть опустить, вращая его по часовой стрелке, то правый момент сил увеличится. Таким образом, при любом отклонении рычага от верхнего положения равновесия появляется сила, стремящаяся это отклонение увеличить, что и означает неустойчивость верхнего положения $\alpha = \alpha_+$.

А вот при малом отклонении рычага от нижнего положения равновесия $\alpha = \alpha_-$ появляется сила, стремящаяся это отклонение уменьшить (убедитесь в этом самостоятельно) и вернуть систему в исходное состояние. Поэтому это положение равновесия устойчиво.

Замечание. Установить устойчивость и неустойчивость положений равновесия можно и по-другому. Пусть вначале рукоятка ворота расположена горизонтально, цепь практически целиком намотана на ворот, так что ведро находится на уровне оси ворота. Теперь отведем рукоятку на угол α от горизонтали (см. рис.2) и запишем потенциальную энергию системы:

$$W(\alpha) = MgL \sin \alpha - mgR\alpha.$$

Возьмем производную по α :

$$W'(\alpha) = MgL \cos \alpha - mgR.$$

Уравнение для критических точек функции $W(\alpha)$:

$$W'(\alpha) = 0, \text{ или } MgL \cos \alpha - mgR = 0,$$

полностью совпадает с полученным раньше равенством моментов сил. При этом критическая точка $\alpha = -\alpha_-$ – это точка минимума потенциальной энергии (при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс), а критическая точка $\alpha = \alpha_+$ – точка максимума. Хорошо известно, что всякая система стремится к состоянию, отвечающему минимуму потенциальной энергии (например, шарик скатывается с горки вниз, растянутая пружина сокращается, а сжатая, наоборот, распрямляется). Снова получаем, что нижнее положение рычага $\alpha = \alpha_-$ устойчиво, а верхнее $\alpha = \alpha_+$ – неустойчиво.

Устойчивость реального ворота. Теперь кратко остановимся на описании реального ворота и будем учитывать массу цепи.

Потенциальная энергия системы в этом случае равна

$$W(\alpha) = MgL \sin \alpha - mgR\alpha - (dR\alpha)g\left(\frac{R\alpha}{2}\right).$$

Сравните это выражение с аналогичным предыдущим – появилось новое слагаемое. Здесь α – по-прежнему угол поворота рычага от горизонтали, d – линейная плотность цепи, $R\alpha$ – длина опустившей части цепи, $dR\alpha$ – масса этой части, $\frac{R\alpha}{2}$ – расстояние, на которое опустился центр тяжести этого участка цепи. Производная по углу α равна

$$W'(\alpha) = g(ML \cos \alpha - mR - dR^2\alpha).$$

Уравнение для критических точек $W'(\alpha) = 0$ теперь таково:

$$ML \cos \alpha = mR + dR^2\alpha.$$

Пусть это уравнение имеет корни (для реального колодца это всегда так). Напомним, что устойчивые положения равновесия системы соответствуют точкам минимума потенциальной энергии, неустойчивые – точкам максимума. При переходе аргумента α слева направо через критические точки в точках минимума производная меняет знак с минуса на плюс. На рисунке 3 критические точки – это абсциссы точек пересечения синусоиды и прямой

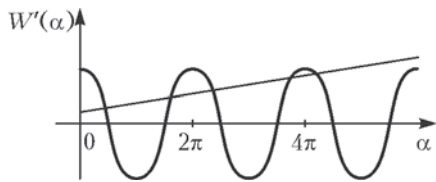


Рис. 3

Обратите внимание на пары критических точек, лежащих по разные стороны от точек $\alpha = 2\pi n$. Легко видеть (сравнивая значения левой и правой частей уравнения), что меньшая (левая) из этих точек – точка минимума потенциальной энергии, бóльшая (правая) – точка максимума потенциальной энергии.

Бифуркация положений равновесия и катастрофы в механической системе типа «ворот». Если при некоторых значениях параметров системы положения равновесия «отдалены» друг от друга, то данную систему можно *устойчиво* использовать как качели – при отклонении от точки покоя система совершает колебания около устойчивого положения равновесия.

А что будет происходить, если продолжать опускать пустое ведро в колодец? Понятно, что цепь будет сматываться с ворота все больше и больше, поэтому масса опустившейся части цепи будет увеличиваться. В результате величины α_- и α_+ будут приближаться к нулю и одновременно друг к другу. Соответ-

ственно, будут приближаться друг к другу и два положения равновесия рычага-вороты (и системы в целом). Наконец, система потеряет устойчивость и произойдет *катастрофа* – скачкообразное изменение, возникающее в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. На деле это означает, что теперь нам не требуется крутить ворот, чтобы опустить ведро. Ведро и большой кусок цепи сами начнут вращать ворот – и тем сильнее и быстрее, чем ниже опускается ведро. Если колодец глубокий, то ворот начинает вращаться очень быстро. Его центр тяжести из-за наличия рычага не лежит на оси, в системе начинаются биения, которые расшатывают столбы, удерживающие ворот. Лучше с самого начала начать тормозить ворот, прижимая к нему ладони. Вот почему часто ворот оказывается отполированным многими тысячами рук (подобно тому, как блестит нос служебной собаки, которую держит на поводке воин-пограничник скульптурной композиции на московской станции метро «Площадь революции»).

С момента слияния двух точек покоя системы ее уже нельзя использовать как качели – никаких качаний тут не получится. Эта элементарная механическая конструкция и ее математическая модель представляют простейшую одномерную машину катастроф с одним управляющим параметром. Одномерная – потому, что ее состояние определяется одной величиной α . Управляющим же параметром является масса цепи.

Описанный процесс потери устойчивости – это пример явления, называемого *бифуркацией*. Термином «бифуркация» обозначают всевозможные качественные изменения или метаморфозы различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. Это понятие, как и фрактал или хаос, относится к разряду междисциплинарных. Им оперируют инженеры и естествоиспытатели, физики и биологи, социологи и другие специалисты гуманитарных наук. Бифуркционные значения параметра важны в физике. Так, если бы термометр был изобретен в Древнем Египте, то точку $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, когда вода превращается в пар, отметить было бы можно, а как отметить $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ – когда вода превращается в лед?

* * *

В заключение читателям предлагается провести небольшую лабораторную работу, наглядно демонстрирующую описанные эффекты. В качестве ворота возьмите катушку из-под ниток, к которой на проволоке жестко прикреплен противовес (рис.4). Катушка вращается вокруг горизонтальной оси – ее роль выпол-

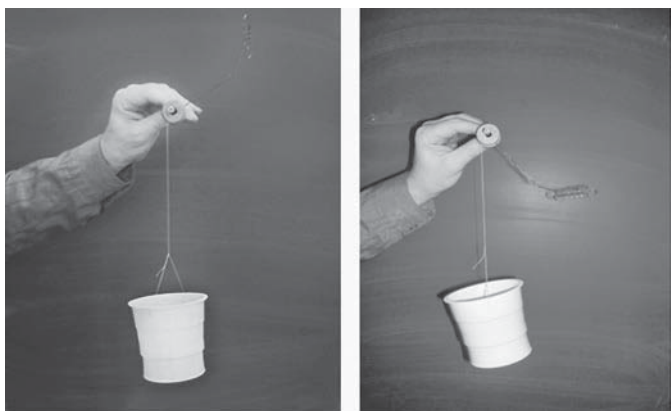


Рис. 4

няет обычный гвоздь. С катушкой связана намотанная на нее нить, на нити закреплена легкая емкость для воды. Вначале емкость пустая. Благодаря сильному трению мы можем наблюдать систему не только в устойчивом положении равновесия (рис.4,б), но и в неустойчивом (рис.4,а). Обычно же неустойчивые положения равновесия наблюдать трудно или даже практически невозможно (шарик на «вершине» другого шара или стоящий на острие заточенный карандаш). Малейшее внешнее воздействие мгновенно переводит систему из неустойчивого положения в устойчивое.

Теперь сделайте вот что. Медленно, почти по каплям, начинайте наливать воду в емкость. Вы заметите, как в ответ на это рычаг, вращаясь против часовой стрелки, будет подниматься вверх и в конце концов приблизится к предельному – горизонтальному – положению. Два положения равновесия сольются и затем исчезнут. Сразу же начнется очень быстрое движение емкости с водой вниз.

Эту модель можно использовать для демонстрации устойчивых качаний качелей (или колебаний) вблизи положения равновесия и для демонстрации явления катастрофы и бифуркации.

О ЗАКОНЕ ПАСКАЛЯ И ФИЗИКЕ СЛИВНОГО БАЧКА

А.Гимелев, С.Дворянинов

В нашей повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с проявлениями разнообразных физических законов. Они лежат в основе функционирования различных устройств, механизмов и машин. Со временем эти устройства совершенствуются. Вот об одном таком усовершенствовании мы и хотим сейчас рассказать. Речь пойдет о весьма прозаической конструкции, а именно о...сливном бачке, этом неперменном атрибуте современных благоустроенных домов.

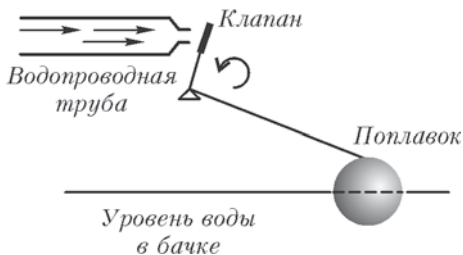
Кто и когда изобрел сливной бачок – это отдельный рассказ из истории техники. Сейчас нас интересует физическая сторона этого механизма. Ясно, что сливной бачок функционирует циклически. Пусть в начальный момент времени бачок полностью наполнен водой. По мере необходимости открывается выпускной сливной клапан, расположенный в нижней части бачка. Это делается вручную, и вода из сливного бачка выливается. Затем клапан под действием силы тяжести закрывает сливное отверстие. В это время в бачок из подведенной к нему трубы начинает поступать вода, чтобы вновь наполнить его водой. Но не более того. Как только бачок наполнится, дальнейшее поступление воды должно быть прекращено. Это делается автоматически с помощью несложного устройства.

Устройство представляет собой Г-образный рычаг, закрепленный на горизонтальной оси и вращающийся в вертикальной плоскости (рис. 1 и 2). На одном конце рычага закреплен поплавок – пластмассовый шар диаметром 4–5 см, на другом конце – резиновый клапан. По мере поступления воды в бачок поплавок поднима-



Рис. 1

ется вверх и поворачивает рычаг (на рисунке 2 – против часовой стрелки). При этом резиновый клапан приближается к трубе. Когда вода достигает требуемого уровня, поплавок поднимается вверх на максимальную



высоту, и клапан полностью перекрывает поступление воды в бачок. Цикл завершен. Бачок снова можно использовать по назначению.

После приведенного описания устройства возможны уже и некоторые расчеты (которые при желании вы можете сделать). Насколько длинными должны быть плечи рычага? Каким должен быть объем поплавка, чтобы действующая на него выталкивающая сила Архимеда смогла преодолеть силу давления воды на клапан, который закрывает трубу? Заметим, что давление воды в сети не маленькое. Чтобы его ощутить, попробуйте, например, чуть приоткрыть кран с холодной водой и затем остановить воду ладонью. Наверняка можно сказать, что сделать вам это не удастся. На практике плечо поплавка имеет длину 20–25 см, а длина меньшего плеча, на котором укреплен клапан, примерно 1 см. Рычаг изготавливают из бронзы, которая не поддается коррозии и не ржавеет. Вода втекает в бачок из сопла – так называют сужение трубы; его диаметр всего 2–3 мм.

Мы описали принципиальную схему автоматического регулятора, применяемого в сливном бачке. Подобные механизмы реально использовались много лет во многих миллионах изготавливаемых из чугуна сливных бачков. Однако новое время – новые материалы. Дорогой чугун заменили керамикой, металлические детали – пластмассовыми, оцинкованные трубы – металлопластиковыми. Важной задачей во всех производствах стало снижение материалоемкости. Стремление к миниатюризации охватило и сантехнику. Существует крылатое выражение – нет ничего практичнее хорошей теории. Оказывается, наблюдаемый нами в настоящее время прогресс в производстве сливных бачков основан на одном из фундаментальнейших законов физики – на законе Паскаля.

Закон Паскаля звучит так: давление на поверхность жидкости, производимое внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях. Этот закон распределения

давления в жидкости установил в 1653 году французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623–1662). Опубликовано он был в 1663 году в «Трактате о равновесии жидкостей». Полное название работы Паскаля таково: «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточно известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты». В этом трактате читаем:

«Если сосуд, наполненный водой и закрытый со всех сторон, имеет два отверстия, одно в 100 раз больше другого, которые прикрыты точно подогнанными к ним поршнями, то один человек, надавливающий на малый поршень, уравновесит силу 100 человек, надавливающих на поршень в 100 раз больший, и преодолеет силу 99. И каково бы ни было отношение этих отверстий, всегда, когда силы, приложенные к поршням, относятся друг к другу, как отверстия, силы эти будут в равновесии. ...Отсюда следует, что сосуд, наполненный водою, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени, потому что при помощи этого средства человек может поднять любую предложенную ему тяжесть».

Совершенно ясно, что в этих словах полностью сформулирована идея гидравлического подъемника, гидравлического прессы, гидравлического привода тормозов современного автомобиля и многих других подобных гидростатических устройств.

Приведем также несколько строк из статьи А.Штейнберга «Еще раз о законе Паскаля», опубликованной в «Кванте» №2 за 1990 год:

«Рассказывая о научных достижениях Блеза Паскаля, невозможно не сказать хотя бы несколько слов об этой экстраординарной личности. В 16 лет он приобретает европейскую известность своей первой математической работой – трактатом о конических сечениях. И вообще период жизни с 12(!) до 23 лет безраздельно отдан математике, и Паскаль становится одним из признанных лидеров в этой области. Лишь после этого, вдохновленный работами итальянца Эванджелиста Торричелли, Паскаль начинает заниматься физикой. И снова – достижения мирового уровня. В 1651 году Паскаль резко обрывает научные занятия и со свойственной ему страстностью погружается в водоворот светской жизни. Еще через три года, испытав мистическое озарение, он внезапно обращается к религии. Ей и литературным занятиям посвящается остаток жизни. В свой “физический” период Паскаль

прославился остроумными опытами по гидростатике. Он в это время жил в Руане, и толпа в несколько сот горожан собиралась на его демонстрации как на праздничные представления. Вот один из самых известных опытов Паскаля, поразивший воображение жителей Руана. В тонкую длинную трубку, вставленную в закупоренную наполненную водой бочку, наливалась вода. Уровень воды в трубке повышался, и в какой-то момент крепко сколоченная бочка разрывалась. Объяснить этот “фокус” вы теперь должны без труда».

Вернемся однако к сливному бачку и его функционированию. Из вышесказанного следует, что если уменьшить диаметр трубы, подводящей воду в бачок, то можно уменьшить длину рычага и тем самым уменьшить размеры всей конструкции. Но при этом уменьшится скорость поступления воды в бачок, точнее – уменьшится объем воды, поступающей в бачок за единицу времени. По этой причине полное наполнение бачка потребует большего времени, и время цикла увеличится. Это, ясное дело, нежелательно, а иногда и просто недопустимо. Как быть? Оказывается, решение этой технической задачи существует. И оно сродни тому, как барон Мюнхгаузен сам себя вытащил из болота за волосы. Действительно, можно «заставить» воду, поступающую в бачок, саму себя перекрывать (обратная связь!).

Рассмотрим сосуд, о котором мы прочитали в выдержке из «Трактата» Паскаля и который на рисунке 3 обозначен буквой *К* (техническое его название – камера). Посредством тоненькой трубочки через маленькое отверстие в верхней части сосуда в него поступает вода из

водопроводной сети высокого давления. Пусть поршень *П*, прикрывающий второе отверстие в этом сосуда, по площади больше (для определенности – больше в два раза) площади сечения трубы, по которой вода поступает в бачок. Если в

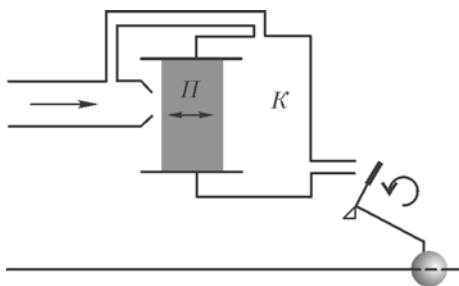


Рис. 3

сосуде никаких других отверстий нет, то получается, что к поршню, прикрывающему второе отверстие в сосуда, будет приложена очень большая сила. Расположим этот сосуд так, чтобы поршень при своем движении из камеры наружу закрывал трубу, по которой вода поступает в бачок. Тогда получается, что

поршень к трубе толкает сила, которая в два раза больше силы, отталкивающей поршень от трубы. Ясно, что в результате поршень закроет трубу, и поступление воды в бачок прекратится.

А как же сделать, чтобы вода смогла поступать в бачок, когда он опустеет? Для этого в камере делают третье отверстие, по диаметру равное первому, маленькому (на рисунке 3 оно изображено в правой стенке камеры, внизу). Через это отверстие вода из камеры льется в бачок. И вот это-то отверстие и снабжают тем элементарным клапаном-рычагом, о котором говорилось раньше. Поскольку теперь приходится перекрывать очень маленькое отверстие, то и размеры этого вспомогательного клапана-рычага могут быть малыми.

Когда бачок пуст, маленькое отверстие открыто. Вода втекает в камеру и вытекает из нее. В камере нет никакого избыточного давления, большой поршень не препятствует поступлению воды из трубы в бачок. По мере наполнения бачка водой поплавок поднимается вверх и перекрывает отток воды из камеры. Давление в камере становится равным давлению в сети, это давление перемещает большой поршень Π к водопроводной трубе, поршень запирает трубу, и поступление воды в бачок прекращается. Если теперь бачок опустошить, то поплавок опустится вниз, давление в камере станет равным атмосферному, и вода в сети сместит большой поршень внутрь камеры. Бачок начнет наполняться водой.

Таково принципиальное устройство современных сливных бачков. Научное название подобных устройств – *регулятор непрямого действия с гидроусилением*. Современные технологии позволяют при этом использовать дешевые, легкие и удоб-

ные в монтаже пластиковые детали (можно обойтись даже без гаечного ключа), а в качестве поршня выступает обычно резиновая мембрана. На фотографии на рисунке 4 представлен один из вариантов такого модернизированного клапана в разобранном



Рис. 4

виде. Здесь диаметр сопла, через которое вода поступает в бачок, равен 5 мм. Сопло перекрывается резиновой мембраной, играющей роль подвижного поршня, диаметр мембраны 2 см. Камера

имеет цилиндрическую форму, ее диаметр 2 см, толщина 1–2 мм. Через одно отверстие в резиновой мембране вода попадает в камеру, через другое отверстие вода из камеры льется в бачок. Эти два отверстия по размеру сравнимы с размером игольного ушка. Ясно, что перекрыть воду, поступающую из камеры в бачок через такое малое отверстие, легко – для этого используется рычаг, большее плечо которого имеет длину всего 4–5 см.

Вот теперь наши читатели, знающие принципиальное устройство сливного регулятора, могут в качестве физико-технической задачи предложить своим друзьям объяснить принцип его работы. Поскольку два отверстия – вход и выход из камеры *K* – практически незаметны, способ функционирования может оказаться непростой и поучительной загадкой. Как говорится, и стар и млад могут поломать над ней голову. Не каждый, имея в руках этот клапан, сразу скажет, как, куда и для чего течет в нем вода... Собственно говоря, жизненная необходимость заменить такой клапан и явилась поводом для появления этого рассказа. В наше время вышедшие из строя отдельные элементы, крупные блоки и даже целые устройства обычно не ремонтируют – проще, быстрее и дешевле заменить их целиком новыми. Тем не менее, мы полагаем, что ответ на вопрос – как устроен клапан? – интересен нашим читателям. Ведь в будущем нашей стране будут нужным не только работники отверточных производств (когда что-то собирают из готовых деталей), но и творцы – создатели нового.

Перефразируя слова Маяковского, можно, пожалуй, сказать, что в наше время закон Паскаля, открытый три с половиной столетия тому назад, проявляет себя и в разнообразных мощных многотонных машинах, и в миниатюрных конструкциях

...весомо,
грубо,
зримо,
как в наши дни
вошел водопровод,
сработанный
еще рабами Рима.

Ясное дело, что описанные здесь и представленные на рисунках регуляторы непрямого действия с гидроусилением создавались изначально отнюдь не для сливных бачков. Их предназначение было намного более серьезным. Но это – как принято говорить – уже совсем другая история.

ИСТОРИЯ С КОРОМЫСЛОМ

С.Дворянинов

О том, что такое коромысло и для чего оно нужно, современные дети могут узнать, пожалуй, только из сказок. Давайте вспомним Емелю:

«Бросил он щуку в воду и кричит: По щучьему веленью, по моему прошенью – ступайте, ведра, домой сами и поставьтесь на место. Да смотрите у меня, чтобы капли не пролилось. И только успел он крикнуть, как пошли ведра – да и с коромыслом – сами домой. По бережку да в горку, – и подгонять не надо. А Емеля сзади идет, посвистывает».

Коромысло – это деревянная дуга с крючками на концах, которые подвешивают, например, ведра с водой, когда несут воду из колодца в дом. А само коромысло кладется на плечи и верхнюю часть спины или на одно плечо.

Минувшим летом мы с моим другом увидели такое коромысло в деревне. До того стояло оно себе спокойно в углу. Мы его взяли, осмотрели со всех сторон, примерили даже, а потом повесили на стену на гвоздь. И надо было случиться, что повесили не за крюк, а за середину дуги. Так что закачалось наше коромысло на этом гвозде, как маятник у настенных ходиков. День был жаркий, выходить из прохладного сарая на солнцепек совсем не хотелось. От нечего делать стали мы за качающимся коромыслом наблюдать. Покачалось оно, покачалось и, ясное дело, остановилось в равновесии. Из-за трения остановилось. Запасенная коромыслом энергия вся ушла на преодоление силы трения между коромыслом и гвоздем, т.е. на работу против этой силы трения. А в конечном счете – на нагревание гвоздя вследствие трения.

Мы вновь отклонили коромысло от положения равновесия, и оно снова закачалось.

– Интересно, а с каким периодом совершаются эти колебания коромысла? – задал вопрос мой друг.

– Это несложно определить. Мобильный телефон у тебя в кармане, а там есть секундомер. Ты его запусти и останови

через минуту. Я же в это время буду наблюдать за коромыслом и считать, сколько качаний туда-сюда, т.е. колебаний, оно совершит. Разделим 60 секунд на это число и узнаем период колебаний.

– А если наблюдать за колебаниями две минуты, то период мы определим, пожалуй, еще точнее.

– Да, но только если за это время коромысло не остановится!

– Действительно, определить период колебаний практически можно легко. А теоретически? Я помню, есть формула для периода колебаний маятника, но учебника или справочника сейчас под рукой нет.

– А мобильный интернет есть?

В общем, через пять минут формула

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

была у нас в руках, точнее – на дисплее мобильного.

– Да, именно по этой формуле у нас была лабораторная работа. Мы подвешивали на нитях разной длины тяжелые гайки и наблюдали за колебаниями. Помнишь, одна нить была в четыре раза длиннее другой, и пока первый маятник совершал одно колебание, второй, с короткой нитью, совершил два колебания.

– В таком случае говорят, что частота колебаний второго маятника в 2 раза больше частоты колебаний первого. Частота – это величина, обратная периоду. Интересно еще, что период колебаний не зависит от массы качающегося на нити груза – в формулу для периода входят лишь длина маятника l , ускорение свободного падения g и еще вездесущее число π .

– Хорошо. А как применить эту формулу к коромыслу?

– Давай рассмотрим невесомый стержень длиной $2l$, который согнули посередине под углом 2α и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Чем тебе не коромысло? Конечно, невесомый стержень не будет качаться, ибо сила тяжести на него не действует, но мы к концам стержня прикрепим одинаковые грузы массой m каждый. Модель готова.

– Но у нас две массы, а у математического маятника она одна.

– Не проблема, про центр тяжести помнишь? Для нашей системы грузов центр тяжести лежит ровно посередине между грузами.

– Осталось найти длину нашего маятника. Это просто: рассмотрим равнобедренный треугольник, в котором длины

боковых сторон равны l , а угол при вершине равен 2α . Тогда высота треугольника, проведенная к основанию (она же и медиана, и биссектриса), равна $l \cos \alpha$. Это и есть длина рассматриваемого нами маятника. В итоге получаем формулу для периода колебаний коромысла:

$$T_{\text{кор}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

– Теперь надо бы как-то проверить полученный результат.

– Пожалуйста. Рассмотрим какой-нибудь частный случай. Пусть, например, $\alpha = 0$. Это означает, что наше коромысло превращается в обычный маятник. Так как $\cos 0 = 1$, то формула для $T_{\text{кор}}$ превращается в формулу для периода колебаний обычного математического маятника. Все в порядке!

– А если рассмотреть другой частный или предельный случай? Пусть теперь угол α увеличивается и неограниченно приближается к $\pi/2$ радианам. При этом значение $\cos \alpha$ уменьшается и неограниченно приближается к нулю. Отсюда следует, что период колебаний нашего коромысла неограниченно уменьшается, а частота колебаний, соответственно, неограниченно растет. На практике это означает, что коромысло, отклоненное от положения равновесия, должно возвращаться в положение равновесия очень быстро. Но мы этого не наблюдаем. Наоборот: наше коромысло, у которого угол α близок к 90° , возвращается в положение равновесия медленно, можно даже сказать как-то нехотя. Наша формула явно противоречит опыту.

В чем же дело? Где допущена ошибка?

Оказывается, все дело в том, что движение двух одинаковых масс при колебаниях нашего коромысла мы заменили движением их центра масс. Поступать так в динамических задачах нельзя. Центр тяжести хорош и помогает при решении задач статики, но может подвести в задачах динамики.

Вот простой пример. Пусть два тела одинаковой массы m движутся по прямой в одном направлении со скоростями v и $2v$.

Их суммарная кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{5}{2}mv^2.$$

Очевидно, что центр тяжести двух масс движется со скоростью $\frac{3}{2}v$. Теперь вычислим по обычной формуле кинетическую энер-

гию движения центра масс и получим

$$\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{3}{2}v\right)^2 = \frac{9}{4}mv^2.$$

Эта величина не равна истинной кинетической энергии нашей системы.

Другой пример. При вращении невесомого стержня с двумя одинаковыми массами, закрепленными на его концах, вокруг середины стержня центр масс системы вообще неподвижен, и его кинетическая энергия оказывается равной нулю.

При рассмотрении коромысла мы заменили колебания двух масс «колебанием» их центра тяжести. А такая замена недопустима. Как же тогда рассчитать период колебаний коромысла? Об этом подробно рассказано, например, в статье А.Черноуцана «Определение периода колебаний: динамический и энергетический подходы», опубликованной в «Кванте» №4 за 2011 год. Здесь же мы лишь приведем верную формулу для периода малых колебаний коромысла:

$$T_{\text{кор}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}},$$

которая явно отличается от полученной нами раньше.

ГРАВИТАЦИОННОЕ «ОТТАЛКИВАНИЕ»

В.Воронов

Закон всемирного тяготения относится к числу фундаментальных физических законов. Казалось бы, нет основания сомневаться в справедливости его основного тезиса о взаимном притяжении тел в природе. Однако существуют ситуации, в которых всемирное тяготение приводит к совершенно неожиданным эффектам. Вот об этих необычных случаях и хотелось бы поговорить.

Вообразим бесконечную вселенную, заполненную водой. Как будут взаимодействовать друг с другом различные тела в этой вселенной? Вроде бы, ответ очевиден: они будут притягиваться, подчиняясь закону всемирного тяготения. Но... не стоит торопиться с выводами. Давайте разберем несколько частных случаев.

Для начала исследуем взаимодействие двух свинцовых дробинok. Сразу стоит оговориться, что термин «взаимодействие» здесь не очень подходит, так как на дробинки действуют не только силы взаимного гравитационного притяжения, но и гравитация вселенной, и силы упругости водной среды. В первую очередь, постараемся учесть все силы, имеющие гравитационную природу.

Учет гравитационного взаимодействия. Рассмотрим силы, действующие на дробинку 1 (рис.1). Проведем через ее центр

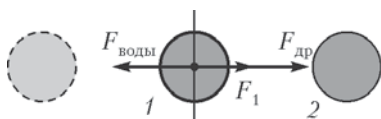


Рис. 1

плоскость, перпендикулярную линии, соединяющей обе дробинки. Она разделит вселенную на две полувселенные. Для удобства назовем их левой и правой. Эти две полувселенные симметричны

относительно разделяющей их плоскости, но в правой есть дополнительная дробинка 2. Симметричные части полувселенных действуют на дробинку 1 с совершенно равными силами притяжения. Результирующая сила является итогом действия

двух различающихся сферических элементов. В правой части это дробинка, а в левой – вода в объеме дробинки. Так как масса дробинки больше массы соответствующего элемента воды, то полная сила \vec{F}_1 , действующая на дробинку 1, будет направлена вправо, но окажется меньше силы гравитационного притяжения к дробинке 2. Рассчитаем эту силу:

$$\begin{aligned} F_1 = F_{\text{др}} - F_{\text{воды}} &= G \frac{m_{\text{др}} m_{\text{др}}}{r^2} - G \frac{m_{\text{др}} m_{\text{воды}}}{r^2} = \\ &= G \frac{m_{\text{др}}}{r^2} (m_{\text{др}} - m_{\text{воды}}) = G \frac{m_{\text{др}}^2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right), \end{aligned}$$

где r – расстояние между дробинками.

Легко показать, что эта формула в случае разных по массе дробинок преобразуется к виду

$$F_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right),$$

а в случае взаимодействия частиц любого вещества в любой бесконечной среде принимает вид

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещества}}} \right).$$

Выражение, стоящее до скобок, полностью совпадает с законом всемирного тяготения, и если плотность среды положить равной нулю, то мы получаем стандартную формулировку закона. (Что и должно произойти, поскольку в этом случае формула описывает гравитационное взаимодействие тел в вакууме.)

Если плотность среды постепенно увеличивать, то сила взаимного притяжения будет уменьшаться, пока не обратится в ноль при равенстве плотностей среды и вещества. Если же плотность среды будет больше плотности помещенных в нее элементов вещества, то сила станет отрицательной, что соответствует отталкиванию этих элементов. Так, два деревянных шарика в водной вселенной будут отталкиваться с силой

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{дерева}}} \right|.$$

Таким образом, тяготение способно породить *отталкивание*!

Этот эффект взаимного отталкивания можно пояснить, вводя в рассмотрение «поля», порождаемые внесением в бесконечную однородную среду элементов вещества с иной плотностью. Появление более плотного вещества приводит к созданию «поля» тяготения. Причем тяготение создается только за счет «избыточ-

ной» плотности в объеме вещества. Если же плотность вещества меньше плотности среды, то возникает «поле» отталкивания. Особенность этих «полей» в том, что они проявляют свои свойства вне зависимости от того, на какое вещество (с плотностью большей или меньшей плотности среды) они действуют. Напряженность такого «поля» можно рассчитать по такой формуле (речь идет о центральном поле):

$$E = G \frac{m_{\text{вещества}}}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещества}}} \right|.$$

Теперь попробуем исследовать более сложный случай. До сих пор мы рассматривали элементы вещества, имеющие одну и ту же плотность. А как будут взаимодействовать тела с различными плотностями? Для определенности выберем деревянный шарик

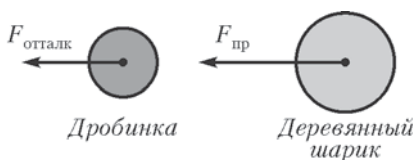


Рис. 2

и свинцовую дробинку и воспользуемся понятиями «полей» отталкивания и тяготения. Дробинка, имея избыточную плотность, создает «поле» тяготения и поэтому будет притягивать деревянный шарик (рис.2). А этот шарик, обладая недостаточной плотностью, создает «поле» отталкивания и потому будет отталкивать свинцовую дробинку. Таким образом, силы, действующие на дробинку и шарик, будут направлены *в одну сторону*. Можно показать, что в этом случае модуль каждой силы, при соответствующей замене индексов 1 (для дробинки) и 2 (для шарика), рассчитывается по формуле

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{\text{среды}}}{\rho_2} \right|.$$

Но нарушение третьего закона Ньютона (силы не только не направлены навстречу друг другу, но, в общем случае, и не равны по модулю), как и закона всемирного тяготения, только кажущееся. Дело в том, что силы, описываемые последней формулой, не являются силами взаимодействия. Наряду с гравитационным взаимодействием тел эта формула учитывает гравитационное влияние вселенной, порожденное ее асимметрией по отношению к каждому из тел. И различие в силах «взаимодействия» порождается именно различным влиянием вселенной на находящиеся в ней элементы.

Подводя промежуточный итог, можно заметить, что учет всех сил, имеющих гравитационную природу, показывает, что закон

всемирного тяготения вызывает не только притяжение тел. Но необходимо помнить, что мы пока не принимали во внимание наличие сил упругости водной среды. Этим и займемся.

Учет архимедовой силы. Кажется вполне очевидным, что в однородной водной вселенной давление во всех точках одинаково. Архимедова сила возникает только тогда, когда появляется неоднородное включение. Рассчитаем эту силу для случая, когда она вызывается появлением свинцовой дробинки.

Рассмотрим произвольно выбранный элемент воды (рис.3). Он находится в состоянии покоя, а значит, сила, действующая со стороны «поля» тяготения дробинки, полностью компенсируется архимедовой силой. Найдем эту силу:

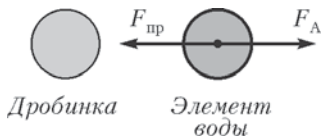


Рис. 3

$$F_A = F_{\text{пр}} = m_{\text{эл-та воды}} E_{\text{«поля»}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{эл-та воды}} E_{\text{«поля»}}.$$

Очевидно, что эта формула, так напоминающая классический школьный вариант $F_A = \rho V g$, может использоваться и для «поля» отталкивания (в этом случае она также будет направлена против «поля»),

А теперь можно попробовать учесть все силы. Вернемся к случаю двух свинцовых дробин.

Полная сила \vec{F}_1 , действующая на первую дробинку, равна векторной сумме сил, вызванной «полем» второй дробинки, и архимедовой силы (рис.4):

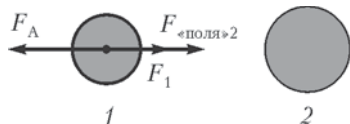


Рис. 4

$$F_1 = F_{\text{«поля»2}} - F_A = m_1 E_{\text{«поля»2}} - \rho_{\text{воды}} V_1 E_{\text{«поля»2}} =$$

$$= \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right) m_1 F_{\text{«поля»2}} = \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right) m_1 G \frac{m_2}{r_2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right) =$$

$$= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} \right)^2.$$

Абсолютная симметрия этой формулы относительно индексов показывает, что полная сила, действующая на вторую дробинку, будет по величине такой же: $F_2 = F_1$. Наличие квадрата выражения в скобках в этой формуле тоже не случайно. Если плотность среды оказывается больше плотности вещества, то знак силы не меняется. А значит, два деревянных шарика в водной вселенной тоже будут притягиваться. И тогда последнюю формулу можно

переписать в более общем виде:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещества}}} \right)^2.$$

Однако и эту формулу нельзя использовать для расчета сил, действующих на тела с различными плотностями. Вернемся к



Рис. 5



Деревянный шарик

ситуации с деревянным шариком и свинцовой дробинкой. Найдем силу, действующую на свинцовую дробинку. Деревянный шарик создает силу отталкивания,

но в противоположную сторону действует архимедова сила (рис.5). Полную силу $\vec{F}_{\text{др}}$ найдем как векторную сумму соответствующих сил:

$$\begin{aligned} F_{\text{др}} &= F_A - F_{\text{отталки}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{др}} E_{\text{отталки}} - m_{\text{др}} E_{\text{отталки}} = \\ &= \left(\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} - 1 \right) m_{\text{др}} E_{\text{отталки}} = G \frac{m_{\text{дерева}} m_{\text{др}}}{r^2} \left(\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{др}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{дерева}}} \right). \end{aligned}$$

Мы видим, что $F_{\text{др}} < 0$, а значит, сила отталкивания больше архимедовой силы. Таким образом, деревянный шарик и свинцовая дробинка будут отталкиваться друг от друга. Можно показать, что такая же по модулю, но противоположно направленная сила будет действовать и на деревянный шарик.

Итак, общая формула, описывающая «взаимодействие» двух тел в бесконечной жидкой среде, имеет следующий вид:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{\rho_{\text{вещ1}} - \rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещ1}}} \right) \left(\frac{\rho_{\text{вещ2}} - \rho_{\text{среды}}}{\rho_{\text{вещ2}}} \right).$$

Очевидно, что в частном случае, когда плотности тел одинаковы, вне зависимости от их соотношения с плотностью среды эти тела будут притягиваться друг к другу ($F > 0$). Притяжение будет наблюдаться и в том случае, когда плотности не равны, но обе либо больше, либо меньше плотности среды. Тогда выражения в скобках в последней формуле будут одного знака, и сила будет положительной. Отталкивание тел возможно лишь тогда, когда плотность одного тела больше плотности среды, а плотность другого – меньше. В этом случае сила меняет знак с положительного на отрицательный, что говорит об отталкивании тел. Если же плотность одного из тел совпадает с плотностью среды, то сила обращается в ноль.

СВЕРХЗВУКОВЫЕ САМОЛЕТЫ И КОНУС МАХА

Е. Соколов

Сверхзвуковые самолеты не только покоряют воздушные океаны, но иногда появляются и в школьных задачах. Вот – пример.

Задача 1. *Наблюдатель услышал звук сверхзвукового самолета через $\Delta t = 10$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет, если его скорость $v = 660$ м/с, а скорость звука $c = 330$ м/с?*

Для человека, который первый раз обращается к рассмотрению полетов сверхзвуковых самолетов, условие этой задачи в высшей степени загадочно.

– А почему так поздно наблюдатель услышал шум самолета? Ведь обычно мы слышим самолет задолго до того, как он пролетит над нами.

– Может, наблюдатель просто задумался над чем-то, поэтому и услышал звук не сразу?

– А может, и не надо ни о чем думать, а просто умножить время на скорость? Только скоростей в условии две...

Эти и другие подобные мысли роятся в голове, цепляются одна за другую и совершенно не проясняют сути дела. И это не удивительно. Привыкшим к миру дозвуковых скоростей очень сложно догадаться, чем полет сверхзвукового самолета отличается от полета обычного самолета и почему мы слышим сверхзвуковой самолет лишь после того, как он пролетит над нами. Первым эту загадку разгадал профессор Венского университета Эрнст Мах. С его именем связаны понятия «конус Маха» и «число Маха».

Чтобы понять, что такое конус Маха, его надо хоть раз в жизни построить самому. Сделаем это и мы. Для этого нам понадобятся лист бумаги в клетку, карандаш, линейка и циркуль. Пусть по листу нашей бумаги слева направо движется сверхзвуковой самолет, пролетающий 2 клетки в секунду, а скорость звука составляет 1 клетку в секунду. Начинаем постро-

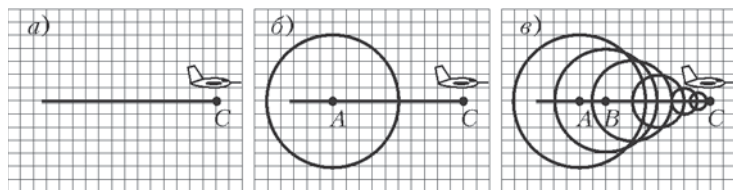


Рис. 1

ение. Если сейчас наш самолет находится в точке C (рис.1,*а*), то где он был пять секунд назад?

– На десять клеточек левее, в точке A (рис.1,*б*).

– Правильно. Излученный им в этот момент звук за пять секунд распространится на пять клеточек во все стороны. Поэтому ставим ножку циркуля в точку A и рисуем окружность радиусом 5 клеточек. Это мы построили геометрическое место точек, до которых дошел звук, излученный 5 секунд назад. И услышали этот звук к настоящему моменту все наблюдатели, находящиеся внутри и на самой этой окружности. Затем нарисуем круг для звука, излученного 4 секунды назад (ножку циркуля надо поставить в точку B , а радиус этого круга должен составлять 4 клеточки), потом – для трех секунд, для двух, для одной (рис.1,*в*). Ну а для звука, излученного только что, и рисовать ничего не надо – он еще не успел никуда распространиться, и его круг это просто точка C , сам самолет. Теперь понятно, в каких точках наблюдатели услышат звук, а в каких – нет.

Если рисовать звуковые фронты более часто, то картина станет еще подробнее, и мы увидим самое интересное – звуковые

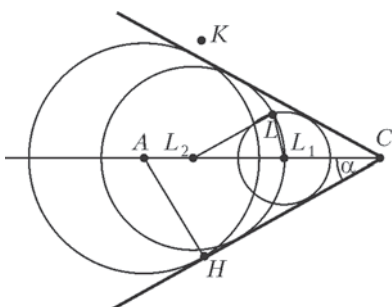


Рис. 2

фронты-окружности имеют общие касательные (рис.2). Эти линии называют огибающими семейства окружностей. В нашей задаче эти прямые-огибающие делят все пространство на область, в которой уже был слышен звук самолета, и область, до которой звук еще не дошел. Точки самой огибающей – это точки, в которые звук только-только пришел. Вот

вам и отгадка, почему сверхзвуковой самолет может уже пролететь над наблюдателем, а тот еще ничего не будет слышать – просто его еще не коснулись огибающие.

тел, равно $3C = v\Delta t$. Теперь мы можем определить высоту полета:

$$h = 3C \operatorname{tg} \alpha = v\Delta t \frac{1/M}{\sqrt{1-1/M^2}} = \frac{v\Delta t}{\sqrt{M^2-1}} = 3810 \text{ м}.$$

Первая задача решена.

Вот вам еще несколько задач. Некоторые – для самостоятельного решения, а некоторые мы решим вместе с вами.

Задача 2. *Сверхзвуковой самолет, летящий горизонтально со скоростью, вдвое большей скорости звука, пролетает мимо двух микрофонов. Через какое время после первого зафиксирует звук самолета второй микрофон, если расстояние между ними $\Delta l = 13,2$ м, а скорость звука $c = 330$ м/с? Рассмотрите два случая: а) микрофоны расположены горизонтально; б) микрофоны расположены вертикально.*

Задача 3. *Траектория сверхзвукового самолета проходит с запада на восток. Первый наблюдатель находится непосредственно под траекторией самолета, второй – на расстоянии $a = 4500$ м от него к югу, а третий – на расстоянии $b = 8000$ м к северу. Чему равны высота полета самолета и число Маха, если второй наблюдатель услышал звук на $\Delta t_2 = 2,28$ с позже первого, а третий – на $\Delta t_3 = 3,80$ с позже второго? Скорость звука $c = 330$ м/с.*

Задача 4. *Два сверхзвуковых самолета летят навстречу друг другу параллельными курсами. Число Маха для первого самолета M_1 , для второго M_2 . Скорость звука c . Второй летчик услышал звук первого самолета через время Δt после того, как первый летчик услышал звук второго самолета. Чему равно расстояние между траекториями самолета? Чему было равно расстояние между самолетами, когда первый летчик услышал звук? Чему было равно расстояние между самолетами, когда второй летчик услышал звук?*

Задача 5. *Самолет 1 летит со сверхзвуковой скоростью v . Летчик самолета 2 хочет лететь так, чтобы не слышать шума мотора первого самолета. При какой минимальной скорости ему это удастся? Какого курса ему следует при этом придерживаться?*

Эту задачу давайте решать вместе.

Пусть летчик второго самолета выбрал курс, составляющий угол β с курсом первого самолета (рис.4). Его траектория – прямая, и по этой прямой движутся две точки: сам второй самолет C_2 и точка A – точка пересечения этой прямой и образующей конуса Маха первого самолета. Летчик второго самолета никогда не услышит звука первого самолета, если точка

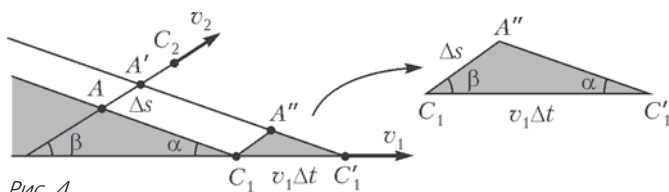


Рис. 4

A никогда не догонит его. Поэтому скорость второго самолета должна быть больше или равна скорости точки A . Найдём эту скорость.

Рассмотрим смещение первого самолета за некоторое время Δt . В треугольнике $C_1C'_1A''$ сторона C_1A'' равна смещению Δs точки A . Используя теорему синусов, получаем

$$\Delta s = \frac{v_1 \Delta t \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

откуда для скорости точки A находим

$$v_A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Обсудим полученное выражение. Если второй самолет будет лететь в том же направлении, что и первый ($\beta = 0$), то

$$v_2 = v_A = \frac{c}{\sin \alpha} = v_1$$

– второму самолету следует иметь скорость, большую или равную скорости первого самолета. Разумный результат. Для курса, перпендикулярного курсу первого самолета ($\beta = 90^\circ$), скорость точки A будет равна

$$v_{\perp} = \frac{c}{\sin(\alpha + 90^\circ)} = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{c}{\sqrt{1 - 1/M^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

А вот минимальная скорость у точки пересечения будет в том случае, когда $\sin(\alpha + \beta) = 1$, т.е. когда $\alpha + \beta = 90^\circ$. Это условие будет выполнено, если наша прямая будет перпендикулярна образующей конуса Маха. Тогда скорость точки пересечения будет просто равна скорости звука c . Об этой скорости часто говорят как о скорости движения волнового фронта или как о скорости движения огибающей.

Итак, ответ к нашей задаче таков. Минимальная скорость, при которой второй летчик может лететь так, чтобы ему не мешал шум первого самолета, это скорость звука c , т.е. достаточно, чтобы второй самолет был просто сверхзвуковым. А для того чтобы путешествовать в тишине, второму летчику следует выб-

рать курс, перпендикулярный образующей конуса Маха первого самолета.

Задача 6. *Сверхзвуковые самолеты летят перпендикулярно друг другу (рис.5) со скоростями, соответствующими*

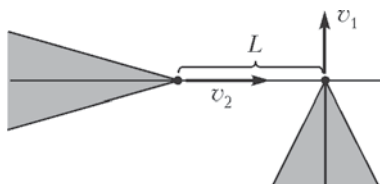


Рис. 5

числам Маха $M_1 = 3$ и $M_2 = 4$. Сколько времени второй летчик будет слышать шум мотора первого самолета, если первоначальное расстояние между самолетами $L = 6600$ м? Услышит ли когда-нибудь первый летчик звук второго самолета? Скорость звука $c = 330$ м/с.

СВЕРХЗВУКОВЫЕ АВТОБУСЫ, ЛОДКИ И... ДЕРЕВЬЯ

Е.Соколов

В статье «Сверхзвуковые самолеты и конус Маха» было показано, насколько полезно использовать понятие конуса Маха при исследовании кинематики сверхзвуковых самолетов. Напомним, что это такой конус, у которого угол α при вершине определяется соотношением $\sin \alpha = c/v$, где в числителе и в знаменателе стоят скорости звука и самолета соответственно.

Конусы Маха – вполне реальные образования, сопровождающие быстро движущиеся предметы: реактивные самолеты, пули и снаряды, метеориты. Они проявляются как уплотнения воздуха, которые можно видеть на фотографиях (рис.1). Первую такую фотографию получил сам Эрнст Мах (интересно, что для этого ему пришлось сконструировать особый фотоаппарат).

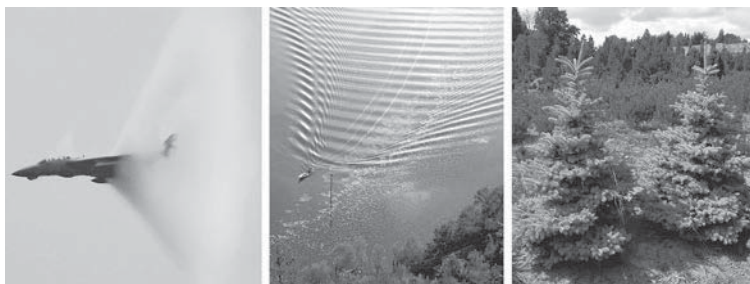


Рис. 1

Конусы Маха можно увидеть и в обычной жизни, надо только внимательно смотреть. Особенно хорошо они видны на мелкой воде. Например – после дождя по улицам бегут широкие, но мелкие потоки воды. Если на их пути попадает камень, то обтекающая его вода образует на поверхности потока две линии возвышения – конус Маха. А бывает, волна набегит на песчаный берег и при ее отступлении за каждой ракушкой образуется свой личный маленький конус Маха.

– А я видел, как ворона шла по мелкой луже, ища место, где попить, и волны от ее лап сложились в конус Маха.

– А я видела, как капли воды, падающие с весла, образовывали на поверхности воды конусы Маха.

– Это очень хорошие примеры. Добавлю, что еще можно просто провести по поверхности лужи прутиком, и при этом тоже образуется конус Маха.

– А то что вершины деревьев имеют коническую форму, это тоже конусы Маха?

– Если ботаники подтвердят, что побеги растут с постоянной скоростью, то – да.

А вот в задачах конусы Маха встречаются не только при движении сверхзвуковых самолетов, метеоров и пуль, но и при движении обычных автобусов или лодок.

Грибники и автобус

Хотя грибники и утверждают, что грибы начинают попадаться как раз тогда, когда опаздываешь на автобус, все-таки лучше не доводить дело до критической отметки. Следует четко следить за временем и аккуратно рассчитывать свой график движения.

Вот классическая задача на такой расчет.

Задача 1. По прямому шоссе движется с постоянной скоростью автобус (рис.2). Нарисуйте так называемую область



Рис. 2

достижимости автобуса, т.е. область, из которой грибник еще может успеть на него. Примите, что скорость грибника в пять раз меньше скорости автобуса.

Обсуждение. Прикинем, что нам надо сделать для того, чтобы получить ответ. Во-первых, в каждую точку плоскости (а их бесконечно много) нам надо поместить по грибнику. Во-вторых, нам надо разрешить каждому грибнику двигаться во всех возможных направлениях (а их тоже бесконечно много), чтобы выяснить, сможет ли он хоть при каком-нибудь направлении движения успеть на автобус.

– Мне лично кажется, что грибнику надо всегда идти к дороге по перпендикуляру ОА (рис.3). Это самый короткий

путь, и он займет меньше всего времени.

— Да, путь OA самый короткий, но для грибника он не лучший — ведь у грибника нет цели выйти на дорогу как можно быстрее, а есть цель выйти на дорогу раньше автобуса. При таком условии путь OA_1 , который идет чуть правее, будет для грибника явно предпочтительнее.

— А мне не очень понятно, почему более длинный путь OA_1 предпочтительнее для грибника. И совсем не понятно, почему это явно видно!

— Ну что же, давайте наберемся терпения и послушаем объяснения.

В некоторых случаях, когда грибник оказывается совсем рядом с дорогой, ему практически все равно куда идти, лишь бы не от дороги. Но вот когда он находится далеко от дороги, может случиться так, что, идя по перпендикуляру OA , он опоздает на автобус, а идя по тропе OA_1 , успеет, хотя и будет идти дольше. Возьмем конкретный пример. Пусть отрезок OA имеет длину 10 км, а точка A_1 лежит на 100 м правее точки A , и пусть грибник, идущий по тропе OA , чуть-чуть опоздал на автобус. А вот у грибника, идущего к точке A_1 , еще есть время — ведь автобусу надо еще проехать до этой точки целых 100 м.

— Ну так и грибнику надо больше пройти!

— Конечно, но на сколько больше? На сколько тропа OA_1 длиннее перпендикуляра: на 100, на 50, на 20 м? Оказывается, всего на 50 см! (Убедитесь в этом, например, с помощью калькулятора.) Поэтому второй грибник выйдет на дорогу в точке A_1 , может, на полсекунды позже первого. А вот автобусу еще ехать и ехать!

А то что путь OA_1 более выигрышный, для опытного человека сразу очевидно по следующей причине. Перпендикуляр OA самый короткий из всех отрезков, ведущих к дороге, и все близкие к нему отрезки будут лишь чуть-чуть длиннее его. Поэтому, смещая конечную точку тропы перпендикулярно отрезку OA вправо, мы лишь чуть-чуть увеличиваем путь грибника, но существенно увеличиваем путь автобуса.

Итак, мы показали, что движение перпендикулярно дороге не самый лучший выбор для грибника. А какой же путь лучший? Увы, мы этого пока не знаем, и поэтому стандартный подход остается для нас по-прежнему неприступным. Надо искать что-

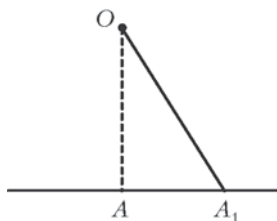


Рис. 3

то нестандартное. Подсказка у нас уже есть – где-то здесь должен появиться конус Маха.

Решение. Поступим наоборот – посадим в автобус много-много грибников и повезем их из города в лес. И при этом договоримся, что в каждой точке шоссе много-много грибников (но не все) будут выходить из автобуса и расходиться во все стороны. Таким образом, автобус едет по дороге со скоростью v , а от него во все стороны, как звук от самолета, расходятся со скоростью c грибники. И у нас образуется... конус Маха (рис.4)

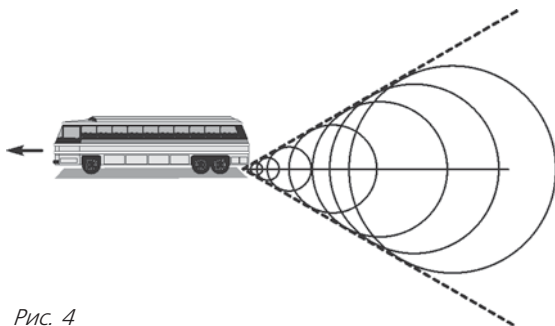


Рис. 4

с углом раствора $\alpha = \arcsin(c/v)$. В каждой точке внутри конуса окажется по два грибника, на самом краю – один, а за краем – никого. Конус Маха и будет той областью, из которой путник может успеть на автобус. Доказать? Пожалуйста.

Любой путник, находящийся внутри или на краю конуса Маха, может успеть на автобус. Для этого ему достаточно просто пойти в направлении, противоположном тому, по которому в данную точку пришел один из грибников. Причем путник выйдет на дорогу как раз к подходу автобуса. Точно так же нетрудно доказать, что ни один путник, стоящий вне построенного нами конуса Маха, ни за что не успеет на автобус (проведите это доказательство самостоятельно).

Итак, ответ к нашей задаче таков: область достижимости автобуса – это конус Маха с вершиной в автобусе и углом при вершине $2\alpha = 2\arcsin(c/v)$. Каждый путник, находящийся внутри конуса, имеет выбор – у него есть два пути, по которым он может выйти на дорогу точно к подходу автобуса, а также он может выбрать любой путь, лежащий между ними. Правда, в этом случае ему придется некоторое время подождать автобус. Для путника же, стоящего на образующей конуса, есть только один вариант возвращения – ему надо идти перпендикулярно этой образующей.

А теперь – задачи для самостоятельного решения.

Задача 2. Грибники Егор, Петр и Иван возвращались из леса. Егор пошел по левой тропинке (рис.5). Он шел до дороги 30 мин и успел точно к автобусу. Иван пошел правой тропинкой. Шел он 40 мин и тоже успел прямо к автобусу. А Петр пошел по самой короткой тропинке и дошел до дороги за 24 мин. Сколько времени Петр ждал автобуса? Скорости всех грибников одинаковы.

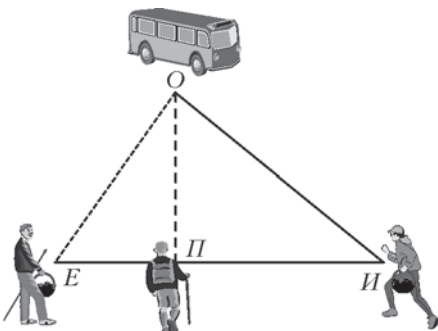


Рис. 5

Задача 3. А еще был с грибниками Сидор, который рассудил так: «Зачем ходить не оптимальными путями? Я пойду оптимальным путем, а время, которое у меня сейчас есть в запасе, потрачу лучше на сбор грибов. Не зря говорят опытные грибники – чем меньше времени до автобуса, тем больше грибов в лесу!» Скажите, сколько времени есть у Сидора в запасе, если он действительно знает оптимальный путь?

Задача 4. Постройте область достижимости автобуса для случаев: а) дорога делает поворот на 90° (рис.6,а); б) водитель берет пассажи-

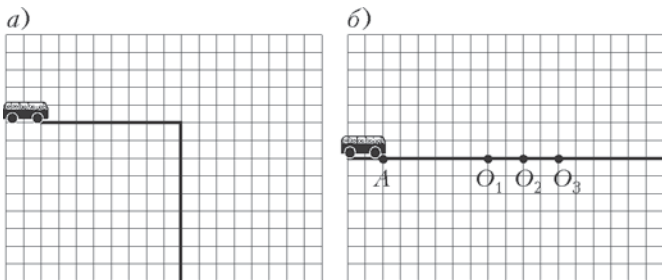


Рис. 6

ров строго на остановках O_1, O_2, O_3 (рис.6,б). Число Маха для автобуса и путника считайте равным двум.

Переправа через реку

Представим, что мы стоим на берегу быстрой широкой реки (рис.7). Примем, что ширина реки $L = 120$ м, скорость ее течения $v = 4$ м/с, а в нашем распоряжении есть весельная лодка, на которой мы можем плыть со скоростью

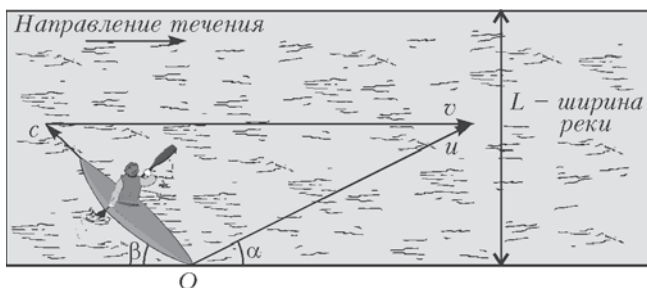


Рис. 7

$c = 3 \text{ м/с}$. Итак, с этого момента величины L , v и c фиксированы. Мы свободны лишь в одном – в выборе курса лодки, т.е. в выборе направления, в котором мы будем грести.

Хотим сразу же предупредить читателя вот о чем. В спокойной воде (на озере) куда мы направляем лодку (гребем), туда же она и движется. А вот на реке это уже разные направления. На рисунке 7 показано, что происходит на реке с лодкой за одну секунду. Мы гребем (направляем лодку) под углом β к берегу и перемещаемся относительно воды на расстояние c . Но кроме этого есть течение, и оно сносит нас за секунду на расстояние v . В результате мы движемся относительно берега под совсем другим углом α и совсем с другой скоростью u .

Вот несколько задач, связанных с переправой через реку.

Задача 5. За какое минимальное время наша лодка (см. рис. 7) может переправиться через реку? Какой курс (угол β) следует при этом выбирать гребцу? На какое расстояние d ее снесет вдоль берега? Каков путь s лодки относительно берега?

Обсуждение. Мы думаем, что у излишне самоуверенных ребят есть личный опыт относительно этой ситуации, и они сразу же догадываются, как следует вести лодку, чтобы время переправы было минимальным. «Излишне самоуверенными» мы называем тех ребят, которые, едва научившись плавать в пруду или бассейне, начинают покорять настоящие реки с быстрым течением. Хорошо, если речка маленькая и сил хватает. А если дело принимает нешуточный оборот: силы на исходе, а противоположный берег еще далеко?

Вот здесь мы и попадаем в ситуацию, когда нам надо как можно быстрее оказаться на другом берегу. Как же надо себя вести? Конечно, надо плыть перпендикулярно течению, т.е. держать курс $\beta = 90^\circ$. И ничего, что течение сносит вниз, главное, чтобы каждый гребок приближал нас к желанному берегу.

Итак, мы вместе с вами ответили на самый главный вопрос задачи. Остальные ответы предлагаем вам получить самостоятельно.

А теперь задача посложнее.

Задача 6. Лодочнику надо переправиться через реку так, чтобы снос лодки был минимальным. Какой курс (угол β) ему следует для этого выбрать? Какой угол (α) образует траектория лодки с берегом? Сколько времени (t) понадобится лодочнику для такой переправы? На какое расстояние (d) снесет лодку? Какой путь (s) проделает лодка относительно берега?

В этой ситуации нам уже вряд ли поможет личный опыт. Даже если кто-то и переправлялся через реку, пытаясь плыть с наименьшим сносом, не факт, что он нашел правильный курс. Поэтому при решении этой задачи следует прибегнуть к рассуждениям. А рассуждения лучше проводить, когда перед глазами рисунок, на котором сразу видны все возможные варианты переправы.

– А есть ли такой чудо-рисунок?

– Есть! И главный его элемент – конус Маха.

Начинаем конструирование. Причем не со скорости c , а со скорости v (рис.8). За секунду река снесет лодку вправо на расстояние v . После этого мы сами должны переместить лодку на расстояние c , при этом направить ее мы можем в любую сторону. Поэтому рисуем полуокружность радиусом c . Каждая точка этой кривой соответствует конкретному выбору курса. А скорость лодки относительно берега – это вектор, соединяющий точку O и выбранную нами точку на окружности.

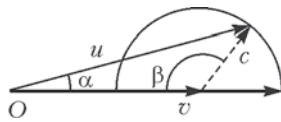


Рис. 8

Итак, все варианты налицо. Правда, конуса Маха пока еще на рисунке нет. Поработаем немного с нашим рисунком – поговорим о разных точках на нем (рис.9).

– Точка 1 ($\beta = 180^\circ$), как бы вы назвали ее?

– Такой выбор переправы можно назвать самым быстрым способом движения. Скорость лодки в этом

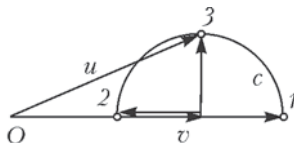


Рис. 9

случае относительно берега самая большая: $u_{\max} = v + c$. Хотя понятно, что при таком выборе направления мы никогда не переправимся через реку.

– Точку 2 ($\beta = 0$) можно назвать самым медленным удалением от исходной точки. Лодка здесь движется с самой маленькой скоростью: $u_{\min} = v - c$.

– А точка 3 ($\beta = 90^\circ$) – это точка из предыдущей задачи, т.е. точка наибыстрейшей переправы.

– Осталось совсем немного: найти на окружности точку минимального сноса. Ответ становится очевидным, если помес-

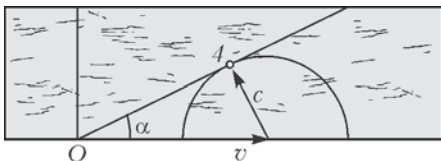


Рис. 10

тить наш рисунок на карту реки (рис.10). Тогда сразу видно, что снос будет минимален, если траектория лодки касается нашей окружности выбора. В результате получается точка 4 – точ-

ка переправы с минимальным сносом.

Теперь на нашей рисунке появился конус Маха с углом при основании $\alpha = \arcsin(c/v)$.

Остальные ответы, связанные с переправой с минимальным сносом, получите сами.

Используя наши полезные рассуждения и рисунки, решите самостоятельно следующие задачи.

Задача 7. При переправе лодочник вел лодку так, чтобы переплыть реку как можно быстрее. А обратно он возвращался так, чтобы снос лодки был минимален. Известно, что на обратный путь он затратил в два раза больше времени. Найдите, во сколько раз скорость течения больше скорости лодки. Во сколько раз путь лодки туда больше, чем путь оттуда?

Задача 8. Обычно лодочник переправляется через реку за 12 минут. А когда он выбирает для переправы новый курс, составляющий угол 90° по отношению к первому, то он тратит на переправу всего 9 минут.

1) Сколько времени лодочник будет тратить на переправу, если будет держать курс перпендикулярно береговой линии?

2) Чему равно отношение скорости течения к скорости лодки, если и при старом и при новом курсе лодочника сносит на одно и то же расстояние?

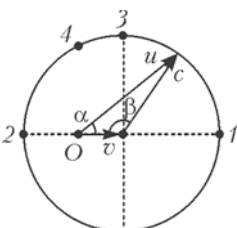
Задача 9. Два лодочника выбирают разные курсы для своих лодок, но пересекают реку за одно и то же время t_0 . При этом вторую лодку сносит при переправе в n раз дальше, чем первую.

1) За какое минимальное время лодочники могли бы переправляться через реку, если скорость течения в M раз больше скорости лодки?

2) При каком максимальном M это возможно?

Скорость обеих лодок в спокойной воде одинакова.

– А если скорость лодки больше скорости реки, есть такие задачи?

– Конечно, есть. Только теперь картинка, на которой видны все варианты нашего выбора, выглядит несколько иначе (рис.11). Но многое на этой картинке остается и от старого случая. Точка 1, по-прежнему, точка самой большой скорости лодки, точка 2 – точка самой маленькой скорости лодки, точка 3 – точка наибо-

 тей скорости лодки, а вот точку 4 теперь следует называть несколько иначе – это точка переправы без сноса. Ведь
Рис. 11

теперь, когда скорость лодки больше скорости течения, нам вполне по силам на равных бороться с ним и добиться того, чтобы нас совсем не сносило.

– Жалко только, что теперь на рисунке нет нашего хорошего знакомого – конуса Маха!

– Ну что же, коли конус Маха стал вам хорошим знакомым, вполне возможно, что вы и без него уже сможете решать сложные задачи. Например, такую.

Задача 10. Лодочник взял за правило переправлять своих пассажиров на другой берег строго перпендикулярно береговой линии (без сноса). Сколько времени будет длиться такая переправа, если ширина реки $L = 120$ м, скорость лодки в спокойной воде $c = 5$ м/с, скорость течения $v = 4$ м/с? Под каким углом относительно берега лодочнику следует направлять свою лодку, чтобы сноса не было? С какой скоростью будет перемещаться лодка относительно берега?

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В.Эпштейн

Математика представляет собой язык, на котором формулируются и решаются физические задачи. И тем не менее, для понимания элементарных (а может быть, и фундаментальных) оснований науки об окружающем нас мире полезно познакомиться с задачами, решение которых не требует проведения математических расчетов. Так, метод эквивалентных деформаций предполагает ряд мысленных изменений конфигурации (т.е. геометрических размеров и формы) тел, при которых основные характеристики системы остаются неизменными, но ход исследуемых процессов становится очевидным. Вашему вниманию предлагается несколько таких задач.

Задача 1. *В небольшом бассейне плавает лодка. Изменится ли (и если изменится, то как) уровень воды в бассейне, если лежащий на дне лодки камень бросить в воду?*

Расчетные методы решения этой задачи предложены во многих учебных пособиях. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

Подумаем: зависит ли ответ на вопрос, поставленный в задаче, от формы дна лодки, на котором лежит камень? Ясно, что такой зависимости быть не может: в законе Архимеда форма тела, погруженного в жидкость, никакой роли не играет. Тогда будем мысленно «продавливать» камень через дно лодки. Последовательные стадии этого процесса показаны на рисунке 1. На одном из этапов камень можно представить подвешенным на веревке, привязанной ко дну лодки. Уровень воды, естественно, не изменится, если удлинить веревку так, чтобы камень коснулся

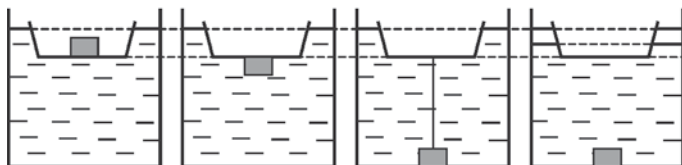


Рис. 1

дна бассейна. Если же веревку теперь перерезать, то, очевидно, лодка всплывет, и, следовательно, уровень воды понизится.

Задача 2. В стакане плавает кусок льда, содержащий: а) пузырек, наполненный воздухом; б) кусочек пробки; в) стальную гайку. Как изменится уровень воды в стакане, когда лед растает?

Заметим для начала, что если лед однороден, то после его таяния уровень воды не изменится: лед вытесняет ровно столько воды, сколько сам весит и, следовательно, сколько получится при плавлении.

Ясно, что решение задачи не зависит от места расположения указанных объектов в куске льда. В случае а), к примеру, пузырек можно переместить к поверхности льда (рис.2). Таким образом, наличие пузырька эквивалентно изменению формы однородного льда, плавление которого, как уже говорилось, уровня воды не изменяет.

Следует отметить, что, строго говоря, сказанное выше справедливо лишь в том случае, если

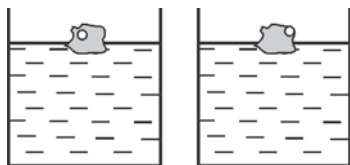


Рис. 2

плотность влажного воздуха в пузырьке совпадает с плотностью окружающего атмосферного воздуха. В состоянии термодинамического равновесия это возможно только в так называемой тройной точке, т.е. при таких значениях температуры и давления, при которых лед, вода и водяной пар находятся в равновесии ($t \approx 0,01^\circ\text{C}$, $p \approx 4,6$ мм рт. ст.).

Таяние льда с вмержшей пробкой – случай б) – уровень воды не изменит, так как пробку можно мысленно выдавить из льда и пустить в самостоятельное плавание на тонкой ледяной нити.

В случае в) гайку, как и в первой задаче, «продавим» сквозь лед до дна стакана, а затем перережем связывающую ледяную нить. Лед всплывет, уровень воды понизится и уже не изменится после плавления льда.

Задача 3. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить некоторую работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, он также наполнится водой, но работы не совершит. Как согласовать полученные результаты с законом сохранения энергии?

Обсудим, в чем суть парадокса.

В первой части задачи речь идет о том, что при падении сосуда, заполненного водой, работа совершается несмотря на то, что для поднятия тела не пришлось затратить никакой энергии. Произведем, однако, с сосудом в исходном состоянии эквивалентную деформацию: мысленно деформируем лежащий на дне

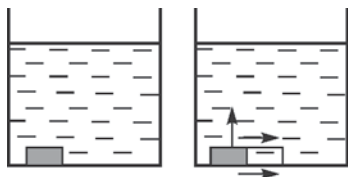


Рис. 3

сосуд так, как показано на рисунке 3. «Выдавим» массу стенок в перемещенную часть, а пустую часть сосуда отделим от заполненной.

Вода окажется «захваченной» стенками сосуда и, таким образом, будет находиться внут-

ри сосуда. Теперь сосуд и «воздух» можно поднимать раздельно. Поднимая сосуд, мы совершаем работу. Поднятие «воздуха» эквивалентно опусканию некоторого объема воды (массы этой воды и сосуда равны). Ситуация совершенно аналогична повороту равноплечного рычага с равными грузами на концах. Поднимая один груз, мы опускаем другой (рычаг находится в положении безразличного равновесия – работа не совершается). Затем мы можем перерезать нить, которой привязан поднятый груз. При падении этого груза сила тяжести совершит работу.

Применяя этот же метод во второй части задачи, мы не видим существенных различий с уже рассмотренным случаем. Наполнение водой сосуда эквивалентно перемещению известного объема воды от поверхности до дна стакана. Работа при этом выполняется такая же, как и в первом случае (при перемещении сосуда).

Отличие условий первой части задачи от второй сводится, таким образом, всего лишь к порядку действий. Нарушения закона сохранения энергии не обнаруживается.

Задача 4. *Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?*

Эта задача была опубликована в «Задачнике «Кванта» (Ф113) в 1971 году. В журнале приведено строгое математическое решение этой (не очень сложной) задачи. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

В случае когда лед оказывается под поверхностью керосина, ответ очевиден: вода, полученная после плавления льда, занимает меньший объем, значит, верхний уровень керосина понизится.

Интерес представляет анализ ситуации, когда лед выступает над поверхностью керосина. Идея эквивалентных деформаций порождает соблазн деформировать лед так, чтобы его вершина оказалась под поверхностью керосина. Таким образом, казалось бы, можно свести рассматриваемую задачу к предыдущей. Однако этот «фокус» не проходит: погружение выступающей части льда в керосин сопровождается повышением уровня жидкости, а после плавления уровень понижается – следовательно, конечный результат не будет очевидным. Итак, деформация оказывается неэквивалентной.

Но если эквивалентная деформация льда не проходит, не стоит ли двинуться в противоположном направлении: оставить лед в покое, а «деформировать» жидкости? Попробуем. Для этого слой керосина толщиной H_1 заменим таким слоем воды, который сохраняет положение льда неизменным (рис.4). Поскольку плотность воды больше плотности керосина, высота этого слоя $H_2 < H_1$. При плавлении льда уровень воды (как было замечено выше) не меняется. Если теперь осуществить обратную замену и вернуть на место керосин (для этого следует

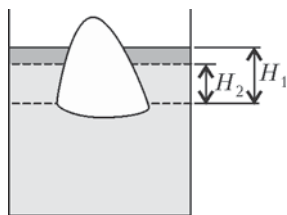


Рис. 4

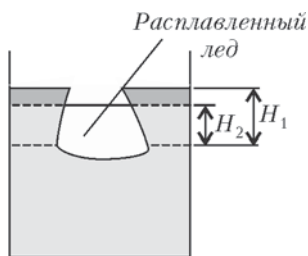
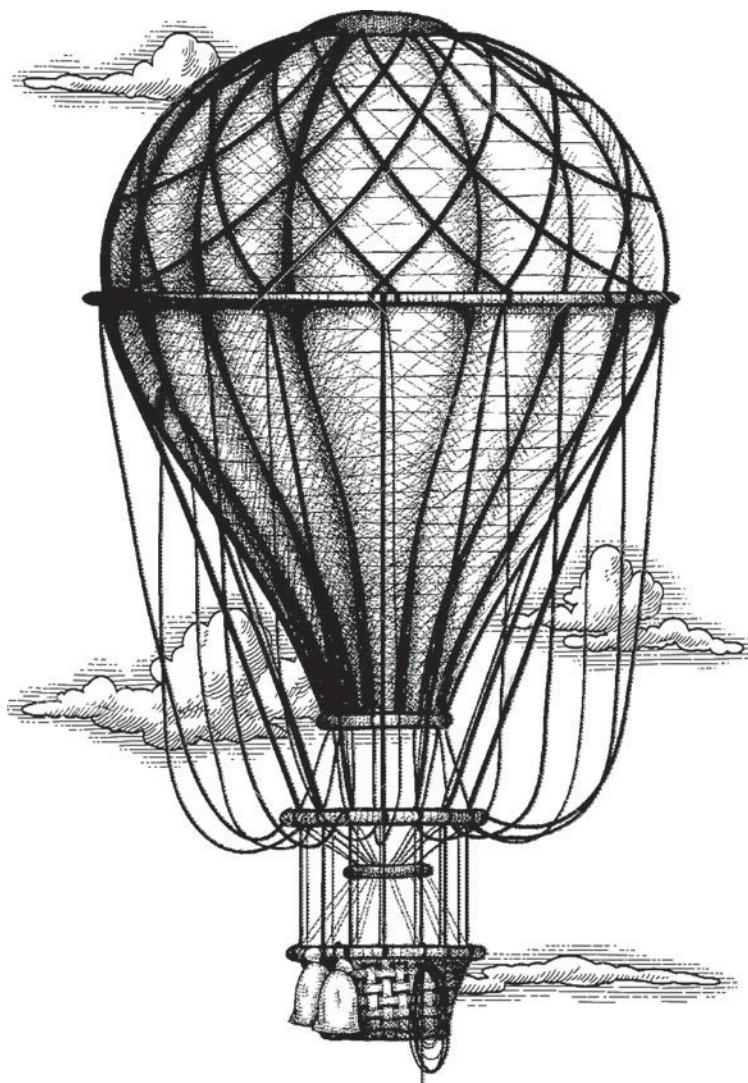


Рис. 5

оставить след поверхности льда, как показано на рисунке 5), то выяснится, что слой керосина над поверхностью, которую ранее образовывала вода, растекается по большей площади и уровень керосина понижается (по сравнению с исходным).

Итак, уровень керосина понижается независимо от того, покрывает керосин ледяную глыбу полностью или частично. Несмотря на то что эквивалентную деформацию льда осуществить не удалось, сама идея метода все же оказалась плодотворной.



ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Д.Бешимбай, О.Конакбаев

В девятом номере журнала «Квант» за 1987 год в разделе «Задачник» Кванта» была опубликована задача Ф1075. Вот ее условие:

Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд небольшой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2. Определите

Таблица 1

$t, ^\circ\text{C}$	25,2	26,4	27,6	28,7	29,7	30,6	31,5	32,5	33,1
---------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Таблица 2

$t, ^\circ\text{C}$	22,6	23,8	25,0	26,0	27,0	28,0	28,9	29,8	30,6
---------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U = 35\text{В}$, ток через кипятильник $I = 0,2\text{А}$, температура в комнате $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

А в первом номере журнала за 1988 год можно ознакомиться с решением этой задачи, выполненным аналитическим способом. С помощью уравнения теплового баланса по данным таблицы 1 находится теплоемкость сосуда с водой, по данным таблицы 2 находится теплоемкость сосуда с водой и образцом и по разности этих теплоемкостей определяется теплоемкость образца. В конце решения автор предупреждает читателей о том, что при расчетах

Когда эта статья была опубликована в журнале «Квант», ее авторы – Дастан Бешимбай и Олжас Конакбаев – были учениками Интеллектуальной школы физико-математического направления города Семей (Республика Казахстан). (Прим. ред.)

допустим довольно значительный разброс результатов. Действительно, выбирая множество пар различных значений температуры, для теплоемкостей можно получить неожиданные результаты с большими разбросами.

Мы предлагаем графический способ решения данной задачи, который помогает наглядно и более точно определить значения теплоемкостей сосуда с водой и сосуда с водой и образцом.

Будем считать, что температура воды увеличивается неравномерно за счет усиления теплоотдачи с ростом температуры. Чтобы учесть влияние теплоотдачи, проследим, как меняется приращение Δt температуры воды за каждые $\Delta \tau = 3$ мин работы нагревателя в зависимости от температуры воды, причем температуру будем считать как среднюю между ее значениями в начале и в конце каждого интервала времени. Построим на основе этого наблюдения следующую таблицу:

Таблица 3

$t_{\text{ср}}, ^\circ\text{C}$	25,8	27	28,15	29,2	30,15	31,05	31,9	32,7
$\Delta t, ^\circ\text{C}$	1,2	1,2	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8

По точкам этой таблицы построим график зависимости Δt от $t_{\text{ср}}$ (рис.1). Как видно из графика, все точки хорошо ложатся на

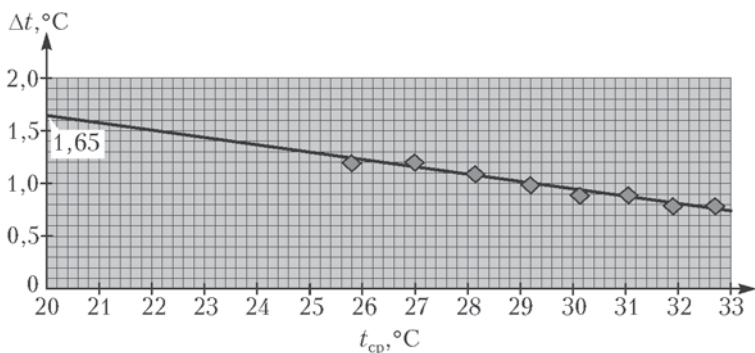


Рис. 1

прямую, пересекающую ординату в точке $\Delta t = 1,65$ $^\circ\text{C}$. Это точка соответствует температуре воды $t = 20$ $^\circ\text{C}$, равной температуре в комнате. Это означает, что при этих условиях теплоотдача воды в окружающую среду отсутствует. Тогда уравнение теплового баланса примет вид

$$IU\Delta\tau = C_{\text{в}}\Delta t.$$

Отсюда находим теплоемкость сосуда с водой:

$$C_{\text{в}} = \frac{IU\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{0,2 \text{ А} \cdot 35 \text{ В} \cdot 180 \text{ с}}{1,65 \text{ К}} \approx 764 \text{ Дж/К}.$$

Аналогичные наблюдения проведем по отношению к сосуду с водой и образцом и получим следующую таблицу:

Таблица 4

$t_{\text{ср}}, ^\circ\text{C}$	23,2	24,4	25,5	26,5	27,5	28,45	29,35	30,2
$\Delta t, ^\circ\text{C}$	1,2	1,2	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,8

Теперь построим соответствующий график зависимости Δt от $t_{\text{ср}}$ (рис.2). Из графика видно, что при абсциссе $t = 20 ^\circ\text{C}$

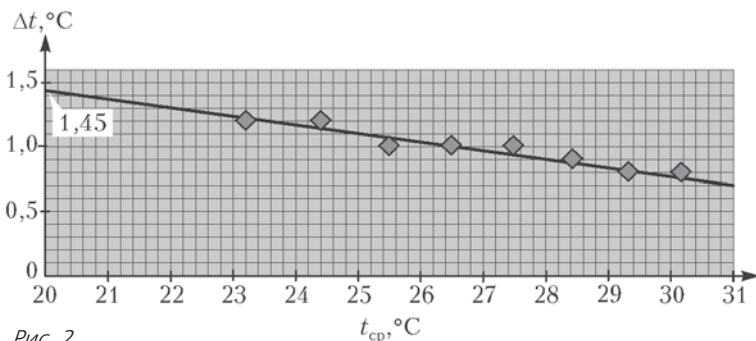


Рис. 2

ордината равна $\Delta t = 1,45 ^\circ\text{C}$. Запишем уравнение теплового баланса в виде

$$IU\Delta\tau = (C_{\text{в}} + C_{\text{об}})\Delta t,$$

откуда найдем искомую теплоемкость образца:

$$C_{\text{об}} = \frac{IU\Delta\tau}{\Delta t} - C_{\text{в}} = \frac{0,2 \text{ А} \cdot 35 \text{ В} \cdot 180 \text{ с}}{1,45 \text{ К}} - 764 \text{ Дж/К} \approx 105 \text{ Дж/К}.$$

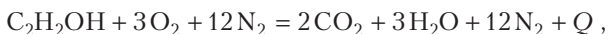
Из графика, приведенного на рисунке 1, хорошо видно, что полученная прямая может пересекаться с абсциссой. Эта точка пересечения для сосуда с водой соответствует температуре $t_{\text{ср}} \approx 49,6 ^\circ\text{C}$ (найдите это значение самостоятельно.) Известно, что с ростом температуры испарение идет более интенсивно, способствуя увеличению теплоотдачи. Если даже закон теплоотдачи не изменится, вода нагреется только до $49,6 ^\circ\text{C}$, т.е. она никогда не закипит. Аналогично, во втором опыте (см. рис. 2) после достаточно долгого времени температура воды с образцом не превысит $41,6 ^\circ\text{C}$, т.е. вода тоже никогда не закипит.

ЗАДАЧА ПРО «МОНГОЛЬФЬЕР»

С. Варламов

Дядя Федор решает сделать шар для полетов в воздухе и назвать его «Монгольфьер». Но прежде он проводит дома испытания уменьшенной модели такого шара, склеенной из папиросной бумаги с поверхностной плотностью $0,04 \text{ кг/м}^2$. Модель имеет объем 1 м^3 и массу оболочки $m = 0,19 \text{ кг}$. Шар подвешивается к потолку на нитке. Для заполнения шара горячим воздухом дядя Федор использует горючее вещество из папиной коллекции – этиловый спирт ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) с удельной теплотой сгорания в воздухе $\lambda = 2,7 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$. Пренебрегая теплоемкостью оболочки и потерями тепла через стенки шара, он оценивает минимальное количество этилового спирта, которое необходимо сжечь, чтобы шар перестал натягивать нитку, на которой висит. Давление атмосферного воздуха $p = 10^5 \text{ Па}$, его температура $t_0 = +20^\circ\text{C}$.

Схему химической реакции горения этилового спирта в воздухе можно представить в виде такого уравнения:



где Q – количество теплоты, выделившееся при сгорании спирта. В написанном уравнении присутствует азот (в правильном соотношении к кислороду), хотя в самой химической реакции он не участвует (азот составляет примерно 80% состава воздуха, а кислород – только около 20%). В процессе полного сгорания спирта из каждых трех молекул кислорода (слева от знака равенства) образуются пять молекул продуктов сгорания (справа от знака равенства). До реакции в газообразном состоянии находилось пятнадцать молекул, а после реакции их стало семнадцать. Будем считать, что тепловая энергия выделилась в воздухе, который состоит только из двухатомных молекул и имеет среднюю молярную массу $M = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Плотность материала оболочки значительно больше плотности окружающего шар воздуха, которая равна $\rho_0 = Mp/(RT_0) \approx 1,2 \text{ кг/м}^3$. Чтобы шар перестал натягивать нитку, плотность ρ

нагревшегося воздуха вместе с продуктами сгорания спирта внутри шара и объем V этой нагретой части воздуха должны быть такими, чтобы соответствовать неравенству

$$(\rho_0 - \rho)V \geq m.$$

При этом температура воздуха внутри шара должна стать равной

$$T = T_0 \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Масса нагрывшегося воздуха равна ρV , и нагрелся этот воздух на $\Delta T = T_0 (\rho_0 - \rho)/\rho$ в процессе с постоянным давлением, т.е. с молярной теплоемкостью C_p . Следовательно, минимальное необходимое количество теплоты равно

$$Q = C_p \frac{\rho V}{M} \Delta T = \frac{C_p m T_0}{M}.$$

Для воздуха $C_p = 7R/2$. Отсюда минимальное количество спирта, которое нужно сжечь, составляет

$$m_{\text{сп}} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{7RmT_0}{2M\lambda} = \frac{7 \cdot 8,31 \cdot 0,19 \cdot 293}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 2,7 \cdot 10^7} \text{ кг} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Получается, что минимальное количество спирта пропорционально произведению температуры окружающего воздуха и массы груза, который нужно поднять. Это количество не зависит от того, какая часть воздуха внутри шара прогрелась, лишь бы не было тепловых потерь наружу.

Теперь время задать главный вопрос: а хватит ли запасов папиной коллекции – приблизительно 0,8 л спирта, – чтобы оторвать от земли дядю Федора, если его масса 50 кг, а суммарная масса оболочки и корзины спроектированного им полномасштабного шара «Монгольфьер» равна массе мальчика, т.е. общая поднимаемая масса составляет $M = 100$ кг?

Для отрыва от земли дяди Федора вместе с корзиной и оболочкой шара «Монгольфьер» потребуется в M/m раз больше топлива, т.е. 1,1 кг спирта, а в папиной коллекции всего около 0,8 кг. Вывод: запасов в папиной коллекции не хватит.

Но у дяди Федора есть коварная (для папы) мысль: провести эксперимент зимой, когда температура T_0 будет меньше и топлива тоже потребуется меньше!

Заметим, что в наших расчетах мы с дядей Федором не рассматривали нагрев оболочки и тепловые потери через оболочку. Для анализа этих явлений и учета их влияния на результат эксперимента можно воспользоваться подсказками. Они есть, например, в статье «Путешествие на воздушном шаре», опубликованной в третьем номере «Кванта» за 2004 год.

ЭТА МАНЯЩАЯ ГЛУБИНА

А.Стасенко

Как только Отличник узнал, что газы сжимаемы, а давление воды растет с глубиной, он подумал: ведь этак можно не бессмысленно нырять, а измерять глубину погружения!

Действительно, если взять мензурку (длинный цилиндрический стакан с делениями) и перевернуть ее вверх дном, то ведь воздух из нее не «вылется». Коснувшись открытым краем поверхности воды (рис.1, верхняя часть), мы «запрем» этот воздух в объеме мензурки $V_0 = Sx_0$. Здесь S – площадь поперечного сечения, $S = \pi r^2$, где r – внутренний радиус мензурки, а x_0 – длина мензурки. При этом давление воздуха внутри мензурки останется равным атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па. Теперь, если медленно погружать мензурку в воду (рис.1, нижняя

часть), поверхность воды будет играть роль поршня, сжимающего газ. Но почему медленно? А чтобы температура воздуха внутри успевала достигать значения снаружи – тогда процесс сжатия окажется изотермическим и будет просто описываться законом Бойля–Мариотта

$$p_0 V_0 = pV, \text{ или } p_0 S x_0 = (p_0 + \rho gh) S x.$$

Здесь x – длина внутреннего цилиндрического объема $V = Sx$ сжатого воздуха, давление которого увеличилось на ρgh при погружении на глубину h . Из этого уравнения найдем

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{1 + (\rho gh/p_0)}.$$

Подставляя значения плотности воды $\rho = 10^3$ кг/м³, ускорения свободного падения $g = 10$ м/с², получим, что на глубине $h = 10$ м

давление увеличилось на $\rho gh = 10^5$ Па, т.е. возросло вдвое. Значит, объем воздуха в пробирке уменьшится в два раза. А на

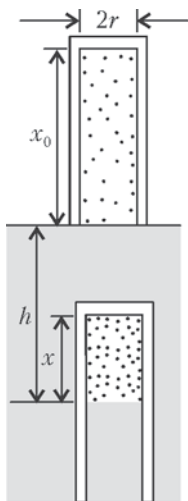


Рис. 1

глубине $h = 20$ м давление уже утроится и так далее. В результате мензурку можно «проградуировать» по глубине, согласно рисунку 2. И – пользуйтесь на здоровье новым глубиномером!

Правда, если температура будет изменяться с глубиной, то произведение pV уже не будет постоянной

величиной и нужно будет использовать закон Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT(h)$. «Ну что же, – вздохнул Отличник, – прикрепим к мензурке термометр и введем поправку на температуру...»

Но тут старший брат Отличника стал сеять новые зерна сомнения: а ведь воздух содержит пары воды, особенно над морем. И если даже их давление $p_{\text{п}}(0)$ у поверхности ($h_0 = 0$) не достигало насыщения, то при сжатии в пробирке оно возрастет, и на глубине пар может-таки стать насыщенным, т.е. $p_{\text{п}}(h) = p_{\text{нп}}(T_0)$ (рис.3). А при дальнейшем погружении пар начнет «выпадать» в осадок, т.е. конденсироваться, превращаясь в воду. Значит, суммарная масса газовой смеси в пробирке будет убывать, и наш прибор будет показывать большую глубину, чем есть на самом деле (см. среднюю кривую на рисунке 2).

«И это еще не все, – продолжал сеять сомнения Брат. – Ведь и сам воздух растворим в воде». Причем, как известно, растворимость газов в жидкости растет с давлением. Доказательств – сколько угодно. Откройте бутылку газированной воды – и увидите пузырьки, внезапно возникшие при резком сбросе давления. Спросите у водолазов – почему они должны всплы-

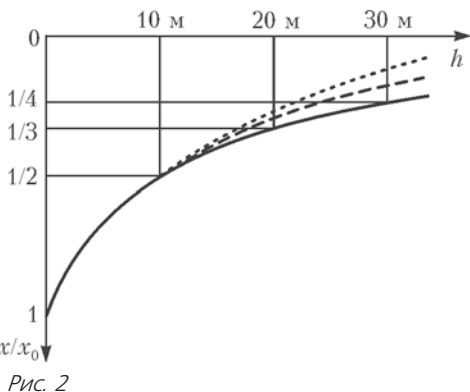


Рис. 2

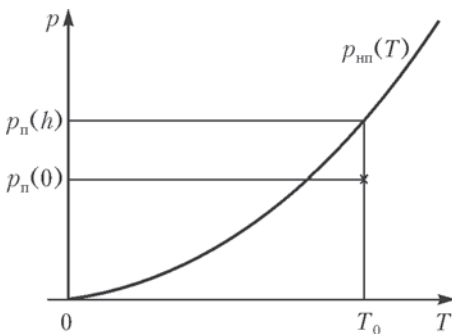


Рис. 3

вать очень медленно? А потому, чтобы азот — часть воздуха, которым они дышат, — растворившись в крови, не вскипал пузырьками (в случае резкого подъема). Значит, не только водяной пар, но и воздух в мензурке при погружении может все более растворяться в воде, и наш прибор станет «врать» еще бессовестнее (см. верхнюю кривую на рисунке 2).

Да, но ведь с увеличением глубины и соответствующим ростом давления сама мензурка должна деформироваться, как всякое упругое тело. Кроме того, в наших рассуждениях принималось, что плотность и давление воздуха внутри мензурки одинаковы по высоте. А между тем известно, что эти величины уменьшаются с высотой, в принципе — на любом конечном расстоянии. Ведь предлагал же знаменитый Фаренгейт брать в горы чайник и по температуре его вскипания определять давление атмосферы и, следовательно, высоту подъема.

«А учли ли вы еще и соленость воды, которая тоже может изменяться с глубиной, впрочем, как и ее плотность?» — спросил сидевший недалеко рыбак.

Но Отличник уже надел ласты. Он понял, что любые измерения — это сложный процесс, включающий много физических явлений. И что надо много учиться.

КАК НАНОКЛАСТЕР С САМОЛЕТОМ СТОЛКНУЛСЯ

И.Амелюшкин, А.Стасенко

Первый контакт со стихией начинается над Кольским полуостровом... Появляются первые признаки обледенения – стекла пилотской кабины становятся матовыми. Начинается тряска...

Из бортового журнала самолета АНТ-25, первый беспосадочный перелет Москва – США, 1937 г.

Но начнем с древних греков. Тогда был известен единственный газ (хаос) – воздух, и он входил в четверку элементарных сущностей: вода, земля, огонь, воздух. Во времена Ломоносова добавился еще один газ – углекислый газ, или двуокись углерода. С тех пор информация о новых газах постепенно накапливалась, и, например, братья Монгольфье, нагревая воздух для своего воздушного шара за счет горения влажной соломы, считали, что получили некий новый газ.

На определенном этапе развития физики стало известно, что воздух, которым мы дышим, это не просто газ, а смесь газов. В их числе – и водяной пар, который идет из чайников и кастрюль, конденсируется поутру в виде капелек росы, висит в виде облаков, оставляет белые шлейфы за самолетами...

Более того, около полувека назад выяснилось, что любой газ состоит не только из молекул, но и содержит некоторое количество молекулярных ассоциаций, или кластеров (облачков), объединяющих две, три, ..., N молекул. Конечно, чем больше N , тем менее вероятно встретить такой кластер в газе, но они есть! С понижением температуры количество и размеры кластеров растут, и, наконец, происходит легко наблюдаемая конденсация. Вот как поэтично сказал о фазовых переходах древнегреческий философ Гераклит Эфесский, отождествляя воздух и водяные пары: «...вода – жива воздуха смертью... воды смерть – воздуху родиться».

А почему, вообще, молекулы «хотят» сконденсироваться? Ведь если их считать твердыми шариками радиусом r_m (m – от

слова *molecule*), то они могут «почувствовать» друг друга только при соприкосновении. Эту мысль можно выразить в терминах потенциальной энергии взаимодействия $\Pi(r)$: на расстояниях между центрами молекул $r > r_m$ нет никакого взаимодействия, а при $r = 2r_m$ энергия взаимодействия резко возрастает до бесконечности (рис. 1, а). На самом деле это не так: молекулы «знают»

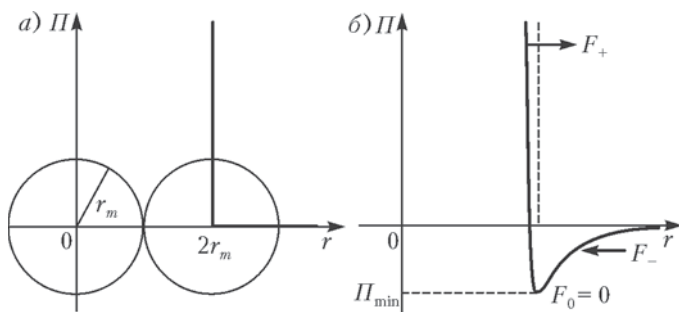


Рис. 1. Потенциальная энергия взаимодействия молекул

друг о друге еще задолго до соприкосновения. Более того, они, будучи электронейтральными, испытывают «влечение» друг к другу за счет того, что обладают дипольными моментами — центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов частиц, входящих в состав молекулы, не совпадают друг с другом.

Этот факт «влечения» друг к другу (в терминах древней философии) выражается в том, что потенциальная энергия взаимодействия молекул уменьшается при сближении (а ведь все тела в природе стремятся к минимуму потенциальной энергии). На рисунке 1, б стрелкой показано направление соответствующей силы притяжения F_- . В точке F_0 ($r = 2r_m$) достигается минимум потенциальной энергии, а при попытке дальнейшего сближения потенциальная энергия резко возрастает — возникают силы отталкивания (стрелка F_+).

И вот, представим себе, что молекулы водяного пара уже объединены в некий кластер, который собирается столкнуться с поверхностью крыла самолета и (что нежелательно) «примерзнуть» к ней. Но ведь и поверхность крыла тоже состоит из молекул (если тело диэлектрическое) или ионов и электронов (если это металл). Значит, взаимодействие этого множества молекул можно описать на языке потенциальной энергии того же вида, что и на рисунке 1, б.

Приведем результаты такого расчета.

Из справочника по физике берем значения r_m и Π_{\min} для воды и алюминия. Считаем, что температура влажного воздуха составляет -10°C , концентрация молекул воздуха соответствует атмосферному давлению и заданной температуре, а концентрация молекул водяного пара соответствует относительной влажности воздуха 10%.

Пусть кластер, образовавшийся в таких условиях, состоит из $N \approx 1000$ молекул воды, среди которых присутствуют молекулы воздуха (это явление в макрофизике называется растворимостью газа в жидкости). Впрочем, число молекул в кластере не является строго постоянным. Наиболее быстрые молекулы, преодолев силы межмолекулярного притяжения, вылетают из наноклапты. Остаются медленные молекулы: их кинетической энергии недостаточно для освобождения от влияния цепких соседей. Любопытно было бы приписать этому живому облачку макроскопические хаактеристики – радиус, коэффициент поверхностного натяжения, плотность...

Поведение молекул воды в такой капле описывается системой из $12(N - 1)$ уравнений; молекулы воды взаимодействуют друг с другом под действием сил межатомного взаимодействия атомов кислорода и водорода. (Число 12 есть сумма параметров, описывающих поведение одной молекулы: по три для поступательной скорости, вращательной скорости, положения центра масс и пространственных углов).

На рисунке 2 отражены последовательные стадии столкновения водяного кластера с поверхностью для $N \approx 1000$. Малень-

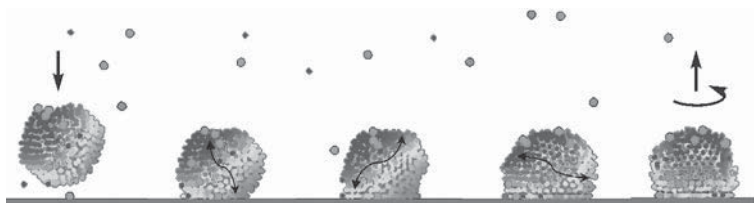


Рис. 2. Последовательные стадии столкновения водяного кластера с поверхностью твердого тела

кими кружками отмечены молекулы воздуха, остальные – молекулы водяного пара. Стрелками показано направление движения жидкости внутри кластера и вращение вокруг вертикальной оси. Температура поверхности при этом $T_{\text{п}} = 0$ (очень холодная поверхность). Видно (см. первый кадр на рисунке 2), что это уже не капля, но еще и не кристалл, хотя и нечто угловатое.

На рисунке 3 видны последовательные стадии столкновения

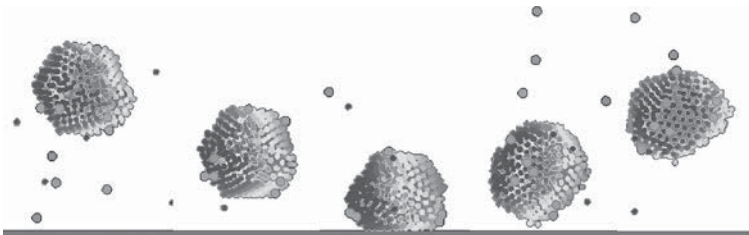


Рис. 3. Столкновение того же кластера с той же поверхностью, но при сильно уменьшенной энергии взаимодействия

для того же значения N , но энергия взаимодействия кластера воды с поверхностью уменьшена по сравнению с предыдущим случаем. В этом случае самолету «повезло» – водяной кластер отразился от его поверхности.

Оценим теперь амплитуду и частоту колебаний атомов кристаллической решетки твердого тела. Будем считать амплитуды одинаковыми во всех направлениях. Тогда, согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы в случае термодинамического равновесия, имеем

$$\frac{m_{\Pi} \langle v_{\Pi}^2 \rangle}{2} \approx \frac{k_{\Pi} \langle \xi^2 \rangle}{2} \approx \frac{k_B T}{2}.$$

Здесь m_{Π} – масса атома (индекс «п» – от слова *поверхность*), v_{Π} – его скорость, k_{Π} – жесткость межатомных взаимодействий, ξ – максимальное смещение атома из положения равновесия, $k_B \approx 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – Постоянная Больцмана. Угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение. Жесткость k_{Π} связана с модулем Юнга E , межатомным расстоянием a и характерной площадью сечения $S = \pi a^2$ законом Гука:

$$k_{\Pi} \approx \frac{ES}{a} = E\pi a.$$

Из последних двух соотношений находим

$$\langle \xi^2 \rangle \approx \frac{k_B}{k_{\Pi}} T \approx \frac{k_B T}{E\pi a}.$$

Если принять $T = 263$ К (-10 °С), $E = 70$ ГПа (для алюминия), $a \approx 2 \cdot 10^{-8}$ см, то для амплитуды колебаний получим

$$\sqrt{\langle \xi^2 \rangle} \approx 0,64 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

что составляет приблизительно 0,2% от a . При этом частота колебаний атомов в решетке при средней скорости колебаний

$\sqrt{\langle v_{\pi}^2 \rangle} \approx 500$ м/с будет равна

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\langle v_{\pi}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle}} \approx 10^{14} \text{ Гц}.$$

Эти данные были учтены при расчете поведения кластера, изображенного на рисунке 4 для $N \approx 150$. Большой кружок

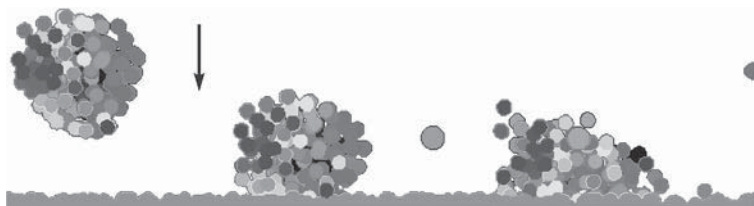


Рис. 4. Кластер стремится «размазаться» по поверхности твердого тела. Тут-то и начинается обледенение

изображает молекулу воздуха. Из рисунка видно, что при ударе о поверхность часть молекул воды стремится покинуть кластер, а сам кластер стремится «размазаться» по поверхности. В этом случае и начинается обледенение.

ОТ ТОЧКИ РОСЫ ДО ТОЧКИ КИПЕНИЯ

В.Птушенко, А.Пятаков

Есть разница меж них. И есть единство.

И.Бродский

Разнообразным необычным (да и самым обычным тоже) свойствам воды и водяного пара было посвящено много статей в «Кванте» — от сугубо практических, например о заваривании чая, о русской бане или сохранении урожая в поле в холодные осенние ночи, до почти романтической истории одной росинки.¹ А с чего начинается история росинки? Этот нехитрый вопрос, на который, наверное, без труда ответит любой читатель, таит в себе если и не загадки, то уж подвохи точно. Вот ему мы и посвятим нашу статью.

Итак, с чего же все-таки начинается история росинки? С конденсации, конечно, это всем известно. Поэтому уточним вопрос: а когда и при каких условиях начинается конденсация? Давайте обсудим все по порядку.

У воды, как у всякого вещества, есть три агрегатных состояния — твердое, жидкое и газообразное. Логично ожидать, что между тремя состояниями имеются две температурные границы: температура плавления и температура кипения. А теперь задумаемся: при какой температуре газообразная вода превращается в жидкую? Если горячий водяной пар, взятый при температуре выше 100 °С, начать охлаждать, то первые росинки (жидкость) появятся в нем..., ну конечно, в точке росы — недаром же эта температура так называется! Постойте, а что же такое тогда точка кипения? Почему же не в ней — в этой пограничной точке между жидким состоянием и газообразным — происходит превра-

¹ См. статью И. Мазина «Приглашение в парную» («Квант» №8 за 1985 г.), А.Варламова и А.Шапиро «Пока чайник не закипел ...» («Квант» №8 за 1987 г.), А.Абрикосова (мл.) «История росинки» («Квант» №7 за 1988 г.), А.Стасенко «Костры в поле и русская баня» («Квант» №1 за 2002 г.).

щение газа в жидкость? В каком же тогда смысле она является границей?

Прежде чем ответить на эти вопросы, подумаем: а при какой температуре вода (как жидкость) превращается в пар? Да при любой! И из чашки с горячим чаем поднимается пар, и из блюда с холодной водой, которое вы оставили для котенка, вода рано или поздно испарится. Даже мокрая простыня на морозном зимнем ветру успевает высохнуть быстрее, чем замерзнуть и «превратиться в камень». В чем же тогда особенность температуры кипения? Ответ хорошо известен: при температуре кипения происходит не просто испарение, а именно кипение, т.е. интенсивное испарение по всему объему жидкости.

Это короткое формальное определение, подобно сказочному ларцу, внутри содержит гораздо больше, чем можно предположить, глядя снаружи. Внутри этого «ларца» прячется одно из основных представлений физики – понятие равновесия. Чтобы жидкость могла долгое время просуществовать, она должна находиться в равновесии со своим окружением. Но разных видов равновесия может быть много – столько же, сколько существует разных видов «движения», т.е. *любого изменения* системы жидкость–газ. Например, есть механическое равновесие между всеми силами, действующими на жидкость изнутри и снаружи. Есть тепловое равновесие, стремясь к которому горячий чай остывает до комнатной температуры. А еще есть физико-химическое равновесие с кислородом, который из воздуха стремится проникнуть в воду и раствориться в ней, давая жизнь вашим аквариумным рыбкам... Так какие же виды равновесия важны в данном случае?

Давайте посмотрим на жидкость под микроскопом: мы увидим в ней мельчайшие пузырьки воздуха. Водяной пар норовит заполнить собой эти пузырьки и «взорвать» жидкость изнутри. Сделать это ему не позволяют водяной пар вместе с воздухом, находящиеся снаружи, над поверхностью жидкости: они «сдавливают» жидкость, это давление передается внутрь от одного слоя к другому, «ощущается» в каждом уголке заполненного жидкостью объема и сдерживает рост пузырьков.

Кроме опасности быть взорванной изнутри, жидкости грозит еще одна опасность – улетучиться, молекула за молекулой, через открытую поверхность в окружающее пространство. Но этому может помешать водяной пар, который уже заполняет это пространство над поверхностью жидкости. Молекула за молекулой, он может возвращаться обратно в жидкость, т.е. конденсироваться, компенсируя испарение. Такое фазовое равновесие

наступает, например, в банке, накрытой крышкой, в которой находится вода, а над ней – влажный воздух с *насыщенным* водяным паром. Роль крышки могут играть также неподвижные воздушные массы при соответствующих атмосферных условиях, и тогда на земле долго не высыхают лужи, а белье на веревках остается влажным, нарушая все планы хозяек.

А что же происходит при кипении? При температуре кипения давление насыщенного пара становится слишком большим – вырастает до атмосферного, пузырьки растут неудержимо, из-под крышки вырывается пар. Нарушаются оба типа равновесия жидкости. Крышка подпрыгивает и позвякивает, напоминая об этом. Можно, конечно, крышку «укрепить», чтобы не прыгала, – тогда получится скороварка², оба равновесия восстановятся, но только давление под крышкой будет уже больше атмосферного.

Обратите внимание: для поддержания фазового равновесия жидкости с открытой поверхностью важен только ее *собственный* пар, его *парциальное* давление, а какие еще газы есть в атмосфере и в каком количестве – совершенно не важно. А вот для сохранения равновесия пузырьков, для того чтобы не происходило кипения, необходимо над поверхностью жидкости иметь еще какой-нибудь газ, кроме самого водяного пара. Если вы ухитритесь из-под закрытой крышки откачать весь сухой воздух, оставив там только водяной пар, то жидкость вскипит. Ничего удивительного: вы понизили внешнее давление до величины, создаваемой лишь одним насыщенным водяным паром, т.е. как раз создали условия кипения.

Вот здесь-то и кроется подвох, который часто мешает пониманию процессов кипения и испарения. При их объяснении главную роль играют парциальное давление водяного пара и полное (атмосферное) давление. Полное внешнее давление, как правило, считается неизменной величиной, в то время как парциальное давление водяного пара, наоборот, может изменяться по мере испарения воды. И действительно, в кухне, где долго кипит чайник, вы можете вполне явственно ощутить повышение влажности, в то время как имеющийся в кухне барометр показывает все то же атмосферное давление. Почему же это давление не повышается? В обычных условиях потому, что уменьшаются остальные слагаемые: водяной пар, заполняя кухню, частично вытесняет из нее азот и кислород, их парциальные давления падают, и суммарное давление остается неизменным. А в необыч-

² Подробнее о принципе работы скороварки рассказывается в упомянутой статье А.Варламова и А.Шапиро.

ных условиях — в уже упоминавшейся нами скороварке, в подземных камерах гейзеров и т.п. — рост парциального давления водяного пара вполне может приводить и к росту суммарного давления, так что оно уже перестает быть постоянным и изменяется, например с температурой.

Теперь мы можем вернуться к вопросам, с которых начали статью. Только сделаем последний шаг — чтобы наглядней сопоставить определения точек росы и кипения, слегка переформулируем одно из них. (Переформулировать классические определения — неблагодарное дело. Но, надеемся, читатель оценит методический смысл этого приема и простит нам эту «фамильярность» по отношению к классике.) Как известно, точка росы — это температура, при которой водяной пар, содержащийся в атмосфере (наряду с азотом, кислородом и пр.), будет насыщенным. А точку кипения определим как температуру, при которой был бы насыщенным водяной пар, целиком «единолично» образующий атмосферу. Отсюда сразу понятно, что точка кипения — это верхняя граница для точки росы и граница для существования жидкости (при заданном внешнем давлении, как правило атмосферном). Поэтому, охлаждая горячий влажный воздух, вы можете обнаружить первые капли жидкости *при любой температуре, но только ниже точки кипения*: если влаги в воздухе немного, то заставить молекулы воды «собраться вместе» удастся, лишь сильно понизив температуру. Если почти весь объем воздуха заполнен паром, то точка росы может оказаться довольно близко к точке кипения (вспомните, как выходящий из кипящего чайника пар покрывает капельками даже очень горячие на ощупь крышку или носик).

Подведем итог сказанному. Процессы испарения и кипения жидкости определяются двумя разными факторами: взаимодействием жидкости с *ее собственным паром* и с *атмосферой в целом*. Суммарное атмосферное давление газа над жидкостью определяет равновесие между жидкостью и образующимися внутри нее пузырьками, т.е. возможность ее вскипания. А парциальное давление пара определяет равновесие жидкости с окружающим паром, т.е., в частности, возможность ее полного испарения или, наоборот, начала конденсации в точке росы.

Будем надеяться, что наша статья поможет читателю увереннее ориентироваться в этих, хотя и очень привычных, однако все же не всегда простых для понимания вопросах. Но если она породит новые вопросы — будет еще лучше!

Авторы благодарны Георгию Евгеньевичу Пустовалову за исключительную поддержку и внимание к данной работе.

ОБЖЕГШИСЬ НА МОЛОКЕ, НА ВОДУ ДЮТ...

А.Стасенко

...И видно, непроста, но чем это объяснить? Наверное, многим знаком невольный эксперимент: быстро вынув палец из кипятка, хочется на него подуть или помахнуть рукой (лучше не пробуйте повторить этот эксперимент). Ясно, что тут речь идет об усилении теплоотвода от пальца в воздух. Физики давно научились описывать этот процесс. Считается, что плотность потока тепловой энергии j_T , измеряемая в $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, в направлении некоторой координаты r пропорциональна скорости изменения (точнее, темпу изменения) температуры в противоположном направлении:

$$j_T \sim -\frac{\Delta T}{\Delta r}. \quad (1)$$

Здесь Δr – расстояние между двумя точками среды, температуры которых отличаются на ΔT , а знак «минус» говорит о том, что тепло течет от горячих участков к холодным. Отношение $\frac{\Delta T}{\Delta r}$ называют градиентом температуры вдоль r , а сама зависимость (1) есть закон Фурье – по имени французского физика и математика Жана Батиста Фурье (1768–1830).

Но, оказывается, такая пропорциональность встречается не только в теории теплопроводности. Например, плотность электрического тока j_ε , измеряемая в $\text{А}/\text{м}^2 = \text{Кл}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, пропорциональна градиенту электрического потенциала Φ , который непосредственно определяет напряженность электрического поля \vec{E} :

$$j_\varepsilon \sim -\frac{\Delta \Phi}{\Delta r} = E_r. \quad (2)$$

Этот закон называется (обобщенным) законом Ома, по имени немецкого физика Георга Симона Ома (1787–1854).

Сравнивая выражения (1) и (2), можно и температуру T назвать потенциалом – разность значений этого потенциала вызывает поток тепла.

Далее, если в каком-либо растворе, например сахара в воде или духов в воздухе, концентрация вещества неодинакова в разных точках, то возникает диффузия, и плотность потока молекул этого вещества j_n оказывается пропорциональной градиенту концентрации n , т.е. темпу ее изменения в пространстве:

$$j_n \sim -\frac{\Delta n}{\Delta r}. \quad (3)$$

Это соотношение – закон Фика, в честь немецкого физиолога Адольфа Фика (1829–1901). Теперь можно и концентрацию вещества назвать потенциалом, разность значений которого вызывает диффузионный поток массы.

Но и это еще не все. Когда мы дуем на палец, скорость потока воздуха у его поверхности близка к нулю, а с удалением от поверхности она возрастает. Иными словами, имеет место изменение касательной составляющей скорости по направлению нормали $\Delta u / \Delta r$. В результате возникает касательное напряжение j_u , измеряемое в $\text{Н}/\text{м}^2$, т.е. трение слоев воздуха друг о друга и, в конечном счете, о саму поверхность обтекаемого тела. И, оказывается,

$$j_u \sim -\frac{\Delta u}{\Delta r}. \quad (4)$$

А ведь это напряжение можно назвать плотностью потока импульса: $\text{Н}/\text{м}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с})/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$! Сравнивая выражение (4) с предыдущими, как не назвать скорость потенциалом? Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются ньютоновскими. Вы догадались, почему? Правильно: его установил великий Ньютон еще в 1687 году.

Теперь можно удивиться и восхититься: различные по своей природе физические процессы, описание которых более чем 100–300 лет назад предложено замечательными учеными разных стран, отражают некий общий факт: плотность потока любой физической сущности – тепловой энергии, электрического заряда, растворимого вещества, импульса... пропорциональна темпу пространственного изменения соответствующего потенциала – температуры, электрического напряжения, концентрации, скорости...

Все упомянутые процессы называются явлениями переноса. Знак пропорциональности в приведенных соотношениях можно заменить знаком равенства, если при каждом градиенте написать соответствующий коэффициент: теплопроводности, электропроводности, диффузии, вязкости... Это хорошо знают студенты уже первого курса университета.

Однако вернемся к обваренному кипятком пальцу. Кто же переносит тепло от пальца и почему хочется на него подуть? Конечно, этим занимаются молекулы. И, конечно, дуновение ускоряет теплоотвод.

Рассмотрим сферу (или полусферу) радиусом R с температурой поверхности $T_{\text{п}}$, моделирующую кончик пальца. Если окружающий воздух спокоен, «горячие» молекулы, тепловая скорость которых соответствует $T_{\text{п}}$, проталкиваются в направлении от поверхности (рис.1,а), а навстречу им также проталкиваются

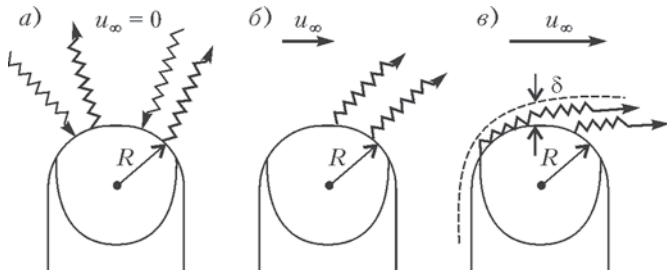


Рис. 1

холодные молекулы из «бесконечности», где температура равна T_{∞} . Устанавливается некоторое распределение температуры, которое качественно представлено кривой a на рисунке 2.

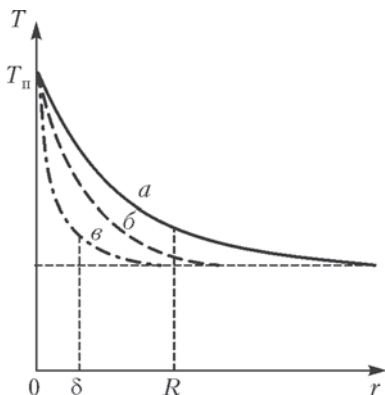


Рис. 2

зависимости от конечной разности температур и расстояния, на котором происходит ее существенное изменение:

$$j_a \sim \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{R}.$$

Теперь начнем потихоньку дуть на палец. Ясно, что молекулы, уносящие тепло, «сдуваются» потоком воздуха (рис.1,б). Наконец, подумем что есть силы, тогда все молекулы, «стартующие» от поверхности, уместятся в тонком слое характерной толщины δ (рис.1,в), существенно меньшей радиуса сферы R ($\delta \ll R$). (Соответствующие этим случаям графики распределения температуры качественно представлены кривыми б и в на рисунке 2.) В результате поток тепла увеличится:

$$j_b \sim \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{\delta} \gg \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{R} \sim j_a.$$

Этот тонкий слой называют пограничным. Он был впервые введен известным немецким аэродинамиком Людвигом Прандтлем (1875–1953) – конечно, не в применении к пальцу, а при решении проблем сопротивления тел в потоке жидкости или газа. Есть мнение, что только за введение этого плодотворного понятия Прандтлю следовало бы присудить Нобелевскую премию.

Но продолжим наши рассуждения. Мы знаем, что именно молекулы уносят тепло от пальца (и приносят «холод» из окружающей среды). Значит, для оценки толщины теплового погранслоя следует использовать характеристики молекулярного хаоса. Какие именно? Разумеется, прежде всего это средняя скорость теплового движения $\langle c \rangle$ – чем быстрее движутся молекулы, тем интенсивнее теплообмен. Далее, это средняя длина свободного пробега молекулы l – чем она больше, тем дальше унесет молекула энергию, передав ее следующей молекуле при столкновении. Произведение этих двух величин имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}$, а если его умножить на время прохождения воздухом характерного расстояния порядка радиуса R , то получим оценку квадрата толщины погранслоя:

$$\delta^2 \sim \langle c \rangle l \frac{R}{u} \sim \langle c \rangle l t. \quad (5)$$

(Кстати сказать, именно Фурье первым стал применять метод размерностей.)

Соотношение (5) характерно для всех процессов блуждания. Оно восходит к первым попыткам описания броуновского движения частиц. А его образным аналогом является проблема пьяного матроса в незнакомом городе. Оказавшись на любом перекрестке, матрос наугад выбирает одно из четырех направлений. Спрашивается: как далеко матрос уйдет от начальной точки, пройдя N кварталов? Ответ: средний ожидаемый квадрат этого удаления пропорционален N . Понятно, что удаление δ будет зависеть и от скорости движения $\langle c \rangle$, и от длины кварталов

l , т.е. будет описываться выражением (5). Осталось подставить его в формулу для плотности потока тепла от поверхности пальца:

$$j \sim \frac{(T_{\text{п}} - T_{\infty})\sqrt{u}}{\sqrt{\langle c \rangle l R}}.$$

Отсюда видно, что от нас зависит только скорость потока воздуха u . Именно она превращает медленную диффузию молекул на дне погранслоя в быстрый конвективный перенос на его внешней границе. Так что дуйте посильнее. Но не переусердствуйте. Ибо если достичь сверхзвуковой скорости, то, наоборот, большая кинетическая энергия потока воздуха перейдет в точке торможения в тепло и даст высокую температуру поверхности. Действительно, из закона сохранения энергии

$$\frac{Mu_{\infty}^2}{2} + \frac{5}{2}RT_{\infty} = 0 + \frac{5}{2}RT_{\text{п}},$$

записанного для одного моля воздуха, при скорости обдува, например, $u_{\infty} = 1000$ м/с получим

$$T_{\text{п}} = T_{\infty} + \frac{Mu_{\infty}^2}{5R} = 300 \text{ К} + \frac{0,029 \cdot 10^6}{5 \cdot 8,31} \text{ К} \approx 1000 \text{ К}!$$

Впрочем, едва ли наши губы и легкие позволят обеспечить сверхзвуковое обтекание пальца воздухом.

Интересно заметить, что при ковке знаменитых сабель из дамасской стали кузнец вручал джигиту раскаленный клинок и джигит немедленно скакал во весь опор, усиленно размахивая им. По-видимому, такой режим охлаждения был оптимальным для тогдашней инновационной технологии.

Но все ли мы учли? Нет, не все: палец-то после кипятка мокрый! И тут вступает в силу еще процесс испарения молекул воды, за которым следует их диффузия в погранслое и унос воздухом. Для описания этого процесса нужно использовать соотношение (3). Нам это не в новинку – ведь и рассмотренная ранее теплопроводность есть не что иное как диффузия тепловой энергии. И теперь к отводу тепла молекулами воздуха добавится унос теплоты фазового перехода L вместе с испаряющейся массой воды:

$$j_m L \sim \frac{n_{\text{п}} - n_{\infty}}{\delta}.$$

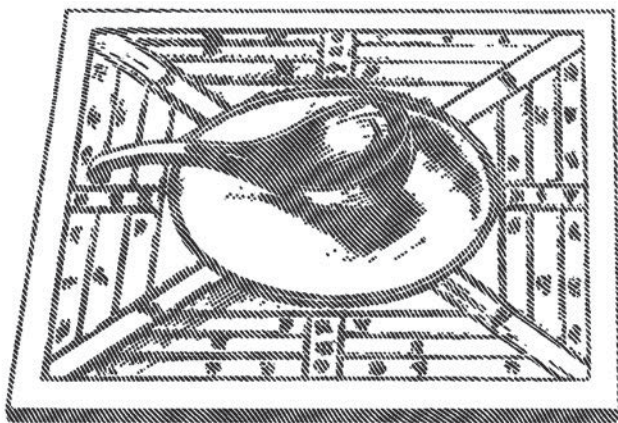
Здесь $j_m = j_n m$ (m – масса молекулы) – это плотность потока массы, уносимой с обдуваемого тела, $n_{\text{п}}$ и n_{∞} – соответствующие значения концентрации молекул воды. Этот унос тепла максимален, если окружающий воздух сухой ($n_{\infty} \rightarrow 0$). И это значитель-

ная добавка – ведь удельная теплота парообразования для воды достаточно велика: $L \approx 2 \text{ МДж/кг}$.

Вот почему для охлаждения летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью, используют жидкость, продавливаемую изнутри через пористую поверхность тела: испаряясь, она уносит тепло и спасает аппарат от сгорания. Не напрасно также в жарких пустынях для охлаждения пепси ставят бутылку, обернутую мокрой тряпкой, на крышу автомобиля и гонят его как можно быстрее. Тут уж работают и u , и L , и...

Вот как полезно знать газотермодинамику!

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



ЭЛЕКТРОСТАТИКА СО ЛЬДОМ

А.Стасенко

Если бы в вашем теле или в теле вашего соседа (стоящего от вас на расстоянии вытянутой руки) электронов оказалось бы всего на 1% больше, чем протонов, то... силы отталкивания хватило бы, чтобы поднять «вес», равный весу нашей Земли!

Фейнмановские лекции по физике

А возможно ли такое? И тут Отличник вспомнил недавние «ледяные дожди», изломавшие тысячи деревьев в России и порвавшие километры электропроводов. Он знал также о том, что в одной только Америке в результате обледенения небольших самолетов ежегодно погибают десятки человек, а материальный ущерб составляет почти миллиард долларов. И ему пришла в голову светлая мысль: если холодные облачные капли, ударяющиеся о поверхность самолета, электрически заряжены, то, образуя ледяную корку (что очень плохо), они могли бы одновременно и разрушать ее (что было бы хорошо).

И Отличник начал рассуждать.

Представим себе тонкую диэлектрическую пленку площадью S , на которой равномерно «размазан» электрический заряд q , так что поверхностная плотность заряда равна $\sigma = q/S$. Будем считать, например, что этот заряд отрицательный: кто-то «напылил» электроны на поверхность пленки. Тогда напряженность электрического поля будет направлена так, как изображено на рисунке 1, а, а значение поля $E = \pm\sigma/(2\epsilon_0)$ представлено на графике на

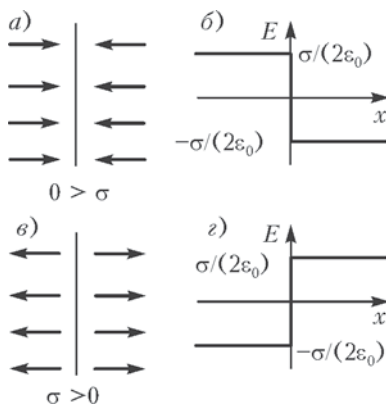


Рис. 1

рисунке 1,б. Видно, что все векторы \vec{E} направлены нормально к пленке, а величина E при пересечении пленки в направлении оси x претерпевает скачок, направленный вниз и равный σ/ϵ_0 .

Как тут не вспомнить плоский конденсатор! Действительно, если мы поднесем к нашей отрицательно заряженной пленке такую же, но положительно заряженную пленку с такой же по модулю поверхностной плотностью заряда (рис.1,в,г), то поле между этими плоскостями ($-h/2 < x < h/2$) удвоится: $E = \sigma/\epsilon_0$, а снаружи исчезнет. Далее, на каждую из этих двух плоскостей, несущих заряды $\pm\sigma S$ и находящихся в поле другой плоскости с напряженностью $\pm\sigma/(2\epsilon_0)$, действует сила притяжения величиной $F = \sigma S \cdot \sigma/(2\epsilon_0)$, которую можно трактовать и как внешнее давление:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1)$$

С другой стороны, эту величину можно рассматривать и как объемную плотность энергии электрического поля – достаточно убедиться в том, что оба физических понятия имеют одну и ту же размерность: $[F]/[S] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Дж}/\text{м}^3$.

Уместно вспомнить, что понятие поля и его физических атрибутов ввел Майкл Фарадей в первой половине девятнадцатого века. Идея поля считается самым важным открытием со времен Ньютона. «Надо иметь могучий дар научного предвидения, – писал А.Эйнштейн, – чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами».

Но вернемся к нашей равномерно заряженной пленке. Представим теперь (рис.2), что пленка не бесконечно тонкая (да такую и негде достать), а имеет толщину h , а тот же самый заряд

q «размазан» равномерно уже по ее объему Sh , так что объемная плотность заряда равна $\delta = q/(Sh) = \sigma/h$. Понятно, что вне этой «тонкой пленки», которую можно теперь назвать слоем толщиной h , направление и величина электрического поля не изменяются (см. также рис.1,б). А внутри? Разумно предположить, что поле внутри слоя будет изменяться непрерывно между его значениями на поверхности слоя,

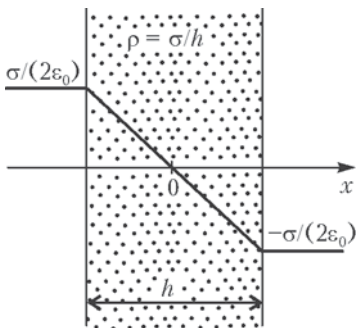


Рис. 2

причем линейно – ну, хотя бы потому, что в средней плоскости ($x = 0$) значение напряженности должно обратиться в ноль (по соображениям симметрии).

Поднесем теперь (рис. 3, а) к этому слою справа металлический цилиндр с плоским торцом, и пусть радиус этого цилиндра много больше толщины слоя, так что поверхность этого цилиндра «бесконечно далеко» от рассматриваемой картины с характерным раз-

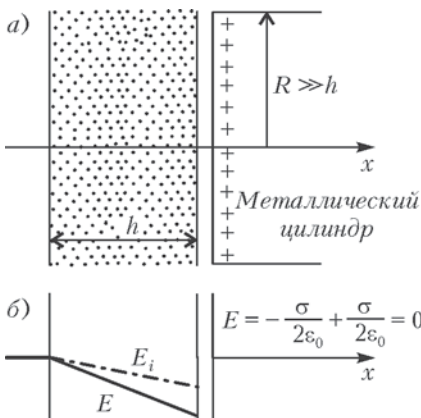


Рис. 3

мером h , помещающейся на наших рисунках. Да, но ведь внутри металла электрическое поле равно нулю (иначе в металле побежал бы электрический ток). А это означает, что на поверхности торца должен возникнуть распределенный *положительный* заряд с плотностью, в точности равной σ (по модулю). Электрическое поле от этого распределенного заряда аналогично первоначальному (см. рис. 2), только противоположно по знаку (см. рис. 1, в, г), так что вне слоя суммарная напряженность поля станет равной нулю (рис. 3, б).

Но при чем тут лед, обещанный выше? А при том, что пора учесть, что наши первоначальные заряды с объемной плотностью $\delta = \sigma/h$ должны быть заморожены в диэлектрик, т.е. в среду, не обладающую свойством электропроводности, – а ведь мы до сих пор считали, что они «развешены» кем-то в вакууме. Но если слой обладает диэлектрической проницаемостью ϵ , то напряженность электрического поля E_i в нем должна быть уменьшена в ϵ раз (см. рис. 3, б, пунктир): $E_i = E/\epsilon$ (тут индекс i означает, если хотите, *inner* – внутреннее, или, если хотите, *ice* – лед). Видно, что наибольшее значение этого поля равно

$$E_{\max} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\delta h}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2)$$

Какую пользу можно извлечь из наших рассуждений? А вот какую: можно оценить внутренние силы, действующие в слое льда. Действительно, если полю в вакууме между двумя заряженными плоскостями мы приписали свойство оказывать давление, то почему бы и в случае с заряженным диэлектриком не

приписать полю то же свойство? Только теперь в формулу (1), казалось бы, разумно добавить множитель $(\epsilon - 1)$ — ведь при $\epsilon \rightarrow 1$ исчезает сам диэлектрик. Однако тут дело сложнее. Хотя при $\epsilon \rightarrow 1$ диэлектрик и превращается в вакуум, напряжение не может исчезнуть: ведь кто-то должен удерживать вместе заряды одного знака. Более точная теория говорит о том, что нужно ввести множитель $2\epsilon - 1$ (впрочем, это не повлияет на порядок величины искомой оценки).

Строго говоря, силы внутри заряженного диэлектрика различны в разных направлениях. В широко известном учебнике И.Е.Тамма «Основы теории электричества», выдержавшем порядка десятка изданий и сыгравшем большую роль в подготовке отечественных физиков в последние пятьдесят лет, об этом сказано весьма образно: «Можно представить себе, что вдоль силовых линий поля натянуты упругие нити, подверженные натяжению... и оказывающие друг на друга боковое давление».

Итак, для наших оценок примем, что наибольшее механическое напряжение внутри равномерно заряженного диэлектрика равно $E_{\max}^2 \epsilon_0 (2\epsilon - 1)/2$, или, используя формулу (2),

$$p_{\max} = \frac{\delta^2 (2\epsilon - 1) h^2}{2\epsilon_0 \epsilon^2}. \quad (3)$$

Пусть теперь рисунок 3,а изображает слой льда, налипший на поверхность какого-либо элемента конструкции самолета (например, переднюю кромку крыла), и пусть в переохлажденном облаке, в котором движется самолет, распределены метастабильные (готовые замерзнуть) капли с концентрацией n и радиусом a . Тогда массовая плотность капель в облаке будет равна

$$\rho_{\infty} = n \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0,$$

где ρ_0 — плотность воды. Далее, допустим (для численной оценки сверху), что каждая капля несет максимально возможный заряд, определенный предельным значением напряженности электрического поля E_* на ее поверхности, выше которого в воздухе начнется стекание заряда с поверхности капли. Тогда, согласно закону Кулона, этот заряд равен

$$Q = E_* \cdot 4\pi a^2 \epsilon_0.$$

При образовании наледи произойдет уплотнение в ρ_i/ρ_{∞} раз, где ρ_i — массовая плотность льда. Тогда объемная плотность заряда станет равной

$$\delta = nQ \frac{\rho_i}{\rho_{\infty}} = \frac{\rho_{\infty}}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0} E_* \cdot 4\pi a^2 \epsilon_0 \frac{\rho_i}{\rho_{\infty}} = \frac{3\rho_i}{\rho_0} \frac{\epsilon_0 E_*}{a}.$$

(Любопытно отметить, что результат оказался не зависящим от «водности» облака ρ_∞ , что, впрочем, вполне понятно. Объемная плотность заряда в наледи такая же, как в каждой капле, с поправкой на отличие плотности льда от плотности воды.) Подставляя все это в выражение (3), получим

$$p_{\max} = \left(\frac{3\rho_i \varepsilon_0 E_*}{\rho_0 a} \right)^2 \frac{(2\varepsilon - 1)h^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon^2} = \frac{9}{2} \left(\frac{\rho_i E_*}{\rho_0 a} \right)^2 \frac{(2\varepsilon - 1)\varepsilon_0 h^2}{\varepsilon^2}.$$

Осталось только сделать численную оценку. Примем $\rho_i = 900 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $E_* = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$, $a = 10 \text{ мкм} = 10^{-5} \text{ м}$, $\varepsilon = 100$, $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Ф/м}$, $h = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$, тогда

$$p_{\max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^{12}}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^2} \text{ Па} = \frac{9}{4\pi} 10^7 \text{ Па}.$$

Это значение вполне сравнимо с измеренными в лабораторных условиях пределами прочности льда. Да только летать в таких облаках не рекомендуется.

Конечно, рассмотренная геометрия мало похожа на переднюю кромку крыла. В следующем приближении можно было бы рассмотреть цилиндр, учесть, что линии тока воздуха и траектории каплей изгибаются перед ним (это связано с известной теоремой Н.Е. Жуковского), и решить численно более сложную задачу.

Но тут другая мысль пришла в голову Отличника: поскольку лед и вода (даже дистиллированная) обладают электропроводностью, заряд может стекать из наледи в проводник! Вернемся к конденсатору, заполненному веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельной проводимостью (величиной, обратной удельному сопротивлению) λ . Ясно, что, чем больше ε , тем больший заряд можно накопить на пластинах (ведь емкость конденсатора пропорциональна $\varepsilon\varepsilon_0$), а чем больше λ , тем скорее конденсатор разрядится. Отсюда очевидно, что характерное время разрядки равно $\tau = \varepsilon\varepsilon_0/\lambda$ (проверьте размерность!). Принимая $\varepsilon = 100$, $\lambda = 10^{-6} \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$, получим $\tau = 10^{-3} \text{ с}$. Значит, заряд почти мгновенно будет уходить из наледи. Да, но при этом должно выделяться джоулево тепло...

Э, брат, — подумал Отличник, — чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института и с успехом его закончить.

Чего вам и желаем!

РАСЧЕТ ЕЛЕКТРОЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ

В.Зварич, В.Ляховец

Как известно, существуют два простейших соединения конденсаторов: последовательное и параллельное. Формулы для нахождения общей электроемкости конденсаторов в этих соединениях давно известны. Но что делать, если конденсаторы соединены не последовательно и не параллельно? Один из методов, которым предлагается решать такие задачи, это метод симметрии. Но его использовать можно не всегда. Встает вопрос: как найти общую электроемкость, а также заряды системы конденсаторов в самом общем случае? Постараемся найти ответ на этот вопрос.

Начнем с простого: рассмотрим два последовательно соединенных конденсатора (рис.1). Очевидно, что при последовательном соединении заряды этих конденсаторов одинаковы. Пусть, например, $q_1 = q_2 = 5 \text{ Кл}$. Чему равен суммарный заряд данной системы? На этот вопрос многие ответят так: $5 \text{ Кл} + 5 \text{ Кл} = 10 \text{ Кл}$. Но это неверно, потому что конденсатор состоит из двух параллельных пластин, отделенных диэлектрической средой (например, воздухом). Это приводит к следующим интересным результатам (рис.2). Заряд от источника тока достигает крайней левой пластины первого конденсатора емкостью C_1 . Он не может пойти

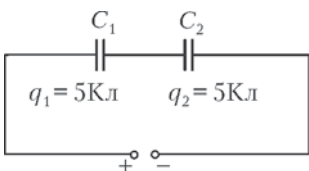


Рис. 1

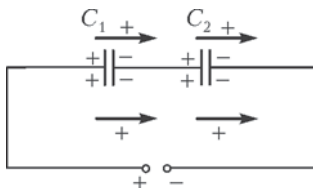


Рис. 2

далее, так как цепь прерывается. Однако положительный заряд на крайней левой пластине удаляет положительные заряды из

ном соединении заряды этих конденсаторов одинаковы. Пусть, например, $q_1 = q_2 = 5 \text{ Кл}$. Чему равен суммарный заряд данной системы? На этот вопрос многие ответят так: $5 \text{ Кл} + 5 \text{ Кл} = 10 \text{ Кл}$. Но это неверно, потому что конденсатор состоит из двух параллельных пластин, отделенных диэлектрической средой (например, воздухом). Это приводит к следующим интересным результатам (рис.2). Заряд от источника тока достигает крайней левой пластины первого конденсатора емкостью C_1 . Он не может пойти

Когда эта статья была опубликована в журнале «Квант», ее авторы – Василий Зверич и Вадим Ляховец – были учениками школы 9 города Пинска (Республика Беларусь). (Прим. ред.)

правой пластины этого же конденсатора (через индукцию), приводя к полному заряду $q_1 = 5$ Кл. Положительные заряды, удаленные из правой пластины первого конденсатора, отправляются через цепь на левую пластину второго конденсатора емкости C_2 . Тем же самым способом удаляются положительные заряды из правой пластины, приводя к полному заряду $q_2 = 5$ Кл на конденсаторе емкостью C_2 . Таким образом, полный заряд системы равен $q = 5$ Кл.

Отсюда следует очень важное свойство: при последовательном соединении конденсаторов заряд между соседними пластинами двух конденсаторов равен нулю (рис.3).

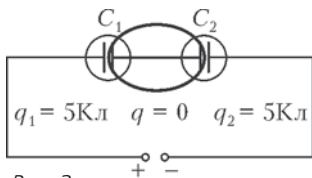


Рис. 3

Используем проведенные рассуждения для решения более сложных задач, где конденсаторы соединены произвольно. Это позволит нам определить заряд и напряжение каждого конденсатора независимо от способа соединения.

Рассмотрим соединение конденсаторов, представленное на рисунке 4. Суммарную емкость можно вычислить по формуле

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_{\text{общ}}}{U},$$

где q — полный заряд и $U = \phi_1 - \phi_4$ — напряжение между клеммами. Проанализируем перераспределение заряда между конденсаторами и найдем области, где заряд между пластинами соседних конденсаторов равен нулю. На рисунке 5 области нулевого заряда между соседними конденсаторами выделены. Полный заряд этой системы равняется полному заряду только двух конденсаторов, емкостями C и $2C$, которые являются самыми близкими к положительной клемме. Заряд прибывает на

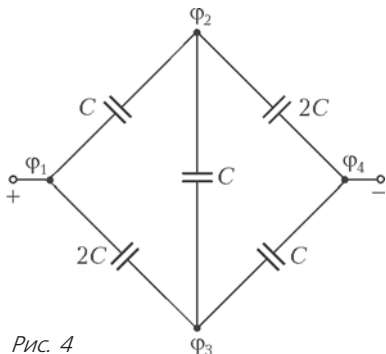


Рис. 4

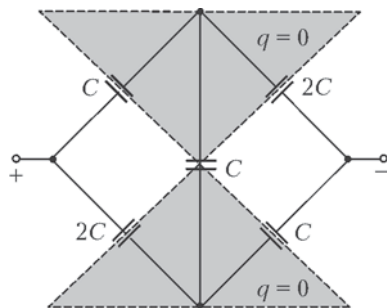


Рис. 5

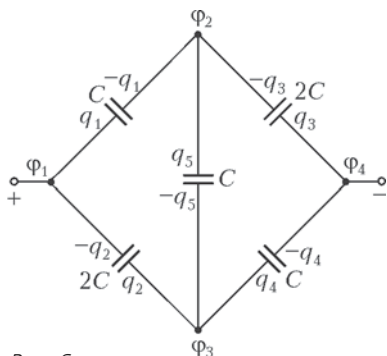


Рис. 6

пластины только этих конденсаторов, а на остальных он перераспределяется, и никакие новые заряды не создаются в системе.

Чтобы продолжить решение, мы в произвольном порядке приписываем заряды всем конденсаторам, как показано на рисунке 6, и получаем следующую систему уравнений:

$$-q_1 - q_3 + q_5 = 0, \quad q_2 + q_4 - q_5 = 0, \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q_1}{C},$$

$$\Phi_3 - \Phi_1 = \frac{q_2}{2C}, \quad \Phi_2 - \Phi_3 = \frac{q_5}{C}, \quad \Phi_4 - \Phi_2 = \frac{q_3}{2C}, \quad \Phi_3 - \Phi_4 = \frac{q_4}{C}.$$

Теперь, зная, что $\Phi_1 - \Phi_4 = U$, необходимо решить данную систему и найти q_1 и q_2 .

Складываем уравнения 3, 4, 5 и получаем

$$0 = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_5}{C}, \text{ или } q_2 + 2q_1 + 2q_5 = 0.$$

Затем складываем уравнения 5, 6 и 7 и получаем

$$0 = \frac{q_4}{C} + \frac{q_5}{C} + \frac{q_3}{2C}, \text{ или } 2q_5 + q_3 + 2q_4 = 0.$$

Из уравнений 3 и 6, учитывая, что разность потенциалов $\Phi_1 - \Phi_4$ равна U , находим

$$U = \frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{2C}.$$

Теперь объединим получившиеся три уравнения с первыми двумя уравнениями нашей исходной системы, выразим из них заряды q_3 , q_4 и q_5 через заряды q_1 и q_2 и получим

$$q_1 = \frac{3CU}{5}, \quad q_2 = -\frac{4CU}{5}.$$

Подставив данные выражения в формулу для общей емкости, найдем

$$C_{\text{общ}} = \frac{|q_1| + |q_2|}{U} = \frac{7C}{5}.$$

Заметим, что первоначальная система уравнений может быть решена быстрее с помощью компьютера.

Данный метод нахождения общей емкости системы конденсаторов универсален. У него есть дополнительное преимущество, что мы не должны даже знать истинные знаки зарядов заранее: если мы предположили знак неправильно, решение просто даст нам отрицательный ответ.

Применим теперь наш метод к решению конкретных задач.

Задача 1. На рисунке 7 дана цепь, в которой $R_1 = 3R$, $R_2 = R$, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $\varphi_1 = 4 \text{ В}$, $\varphi_4 = 0$. Нужно определить заряд на конденсаторе емкостью C_1 .

Решение. Зная, что по конденсаторам ток не идет, найдем общее сопротивление цепи:

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 = 4R,$$

ток в цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_{\text{общ}}} = \frac{\varphi_1}{4R},$$

разность потенциалов между точками 3 и 4:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = IR_2 = \frac{\varphi_1}{4}, \text{ или } \varphi_3 = \frac{\varphi_1}{4}.$$

Теперь мы можем решить задачу нашим методом. И первое, что мы делаем, это на схеме в произвольном порядке расставляем заряды (рис.8). Из рисунка видно, что

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Остальные уравнения, как обычно, добираем из определения электроемкости конденсаторов:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q_1}{C}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q_2}{2C}, \quad \varphi_4 - \varphi_2 = \frac{q_3}{3C}.$$

Зная, что $\varphi_4 = 0$ и $\varphi_3 = \frac{\varphi_1}{4}$, решим данную систему уравнений и найдем искомый заряд q_1 :

$$q_1 = \frac{C\varphi_1}{8} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

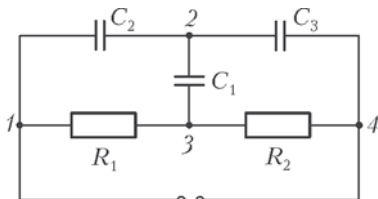


Рис. 7

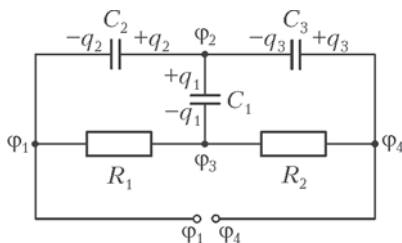


Рис. 8

Задача 2. В цепи, изображенной на рисунке 9, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C_4 = 4C$, $C_5 = 5C$, $C_6 = 6C$, $C_7 = 7C$, $C_8 = 8C$, $C_9 = 9C$, $C_{10} = 10C$, $C_{11} = 11C$, $C_{12} = 12C$, $C = 1 \text{ мкФ}$. Нужно найти общую емкость цепи.

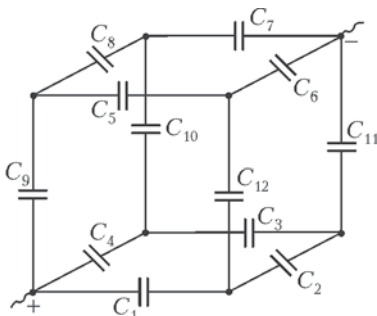


Рис. 9

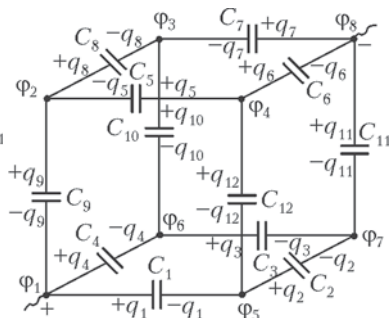


Рис. 10

Решение. Расставим заряды и потенциалы в произвольном порядке (рис.10). Далее находим области, где суммарный заряд равен нулю, – это будут вершины куба. Составляем уравнения зарядов:

$$\begin{aligned} q_1 + q_4 - q_9 &= 0, & q_8 + q_9 - q_5 &= 0, \\ q_2 - q_1 - q_{12} &= 0, & q_5 + q_6 + q_{12} &= 0, \\ q_{10} - q_8 - q_7 &= 0, & q_3 - q_4 - q_{10} &= 0, \\ -q_2 - q_3 - q_{11} &= 0, & q_7 - q_6 + q_{11} &= 0 \end{aligned}$$

и определения электроемкости конденсаторов:

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_5 &= \frac{q_1}{C}, & \Phi_5 - \Phi_7 &= \frac{q_2}{2C}, & \Phi_6 - \Phi_7 &= \frac{q_3}{3C}, & \Phi_1 - \Phi_6 &= \frac{q_4}{4C}, \\ \Phi_4 - \Phi_2 &= \frac{q_5}{5C}, & \Phi_4 - \Phi_8 &= \frac{q_6}{6C}, & \Phi_8 - \Phi_3 &= \frac{q_7}{7C}, & \Phi_2 - \Phi_3 &= \frac{q_8}{8C}, \\ \Phi_2 - \Phi_1 &= \frac{q_9}{9C}, & \Phi_3 - \Phi_6 &= \frac{q_{10}}{10C}, & \Phi_8 - \Phi_7 &= \frac{q_{11}}{11C}, & \Phi_4 - \Phi_5 &= \frac{q_{12}}{12C}. \end{aligned}$$

Заряд от положительной клеммы идет только на конденсаторы емкостями C_1 , C_4 и C_9 . Значит, надо найти заряды на этих конденсаторах. Обозначив $\Phi_1 - \Phi_8 = U$, решим полученную систему уравнений и получим

$$q_1 \approx 2,04 CU, \quad q_4 \approx 11,16 CU, \quad q_9 \approx 13,20 CU.$$

Остается только найти общую электроемкость цепи:

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_1 + q_4 - q_9}{U} \approx 26,4 C = 26,4 \text{ мкФ}.$$

ЗАГАДКИ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

И.Леенсон

Трудно найти человека, ни разу не видевшего компас. Этот простенький прибор необходим и путешественнику, и охотнику, и даже грибнику, идущему за грибами в незнакомый лес. Какие же тайны может скрывать в себе такой прибор? Синий конец стрелки компаса показывает на север, красный показывает на юг — казалось бы, вот и весь секрет. Оказывается, не все так просто, и с этого лишь начинается наша серия загадок про магнитную стрелку.

Загадка первая. *Всегда ли синий конец стрелки компаса показывает на север?*

Далее. Многие видели подковообразные или полосовые магниты. Если полосового магнита нет, но есть сильный подковообразный, с его помощью легко намагнитить стальную полоску (или просто длинную иголку), сделав из нее полосовой магнит. Концы магнита, где обнаруживаются наиболее сильные магнитные действия, называют полюсами магнита. Слово «полюс» происходит от греческого *pólos* — ось, поэтому в дальнейшем вместо «конец стрелки» или «конец магнита» будем говорить «полюс». У каждого магнита, как и у земного шара, есть два полюса: северный и южный, только эти полюса называются магнитными. По традиции, ту половину магнитной стрелки, которая показывает на север, окрашивают в синий цвет и ее конец называют северным полюсом магнита; его обозначают буквой N. Ту же половину магнитной стрелки, которая показывает на юг, окрашивают в красный цвет и ее конец называют южным полюсом магнита; его обозначают буквой S. Так же окрашивают и



Старинный китайский компас

обозначают любые постоянные магниты. Такое обозначение пришло в русский язык из голландского во времена правления Петра I.

А при чем тут голландцы? Дело в том, что когда-то Голландия была владычицей морей и соперничала с Англией. Так, 21 августа 1673 года около голландского острова Тексель состоялось морское сражение между голландским и объединенным англо-французским флотами; в это время шла уже третья англо-голландская война (1672–1674). В бою, длившемся весь день, голландцы одержали победу, хотя численный перевес был на стороне противника. Голландия захватила в те времена обширные колонии, особенно в Юго-Восточной Азии. До сих пор в государстве Суринам в Южной Америке голландский – это официальный язык.

Если у вас есть два магнита или один магнит и компас (его стрелка – тот же магнит, только маленький и легкий), то легко убедиться в том, что синий полюс одного магнита притягивает красный полюс другого, а одинаково раскрашенные полюса друг от друга отталкиваются. Если подвесить полосовой магнит точно за его середину на нитке подальше от железных предметов, нитку к чему-нибудь привязать и подождать, пока магнит перестанет раскачиваться, то мы увидим, что полоска повернулась так же, как и стрелка компаса. Иными словами, одним концом она будет показывать на север, другим – на юг. Значит, наша намагниченная полоска – тоже компас, только большой и неудобный.

Теперь – следующая загадка.

Загадка вторая. *Что будет, если намагниченную полоску разрезать пополам точно посередине?*

И еще одна загадка.

Загадка третья. *Можно ли намагнитить шар?*

Если есть загадки, должны быть и разгадки. Действительно, откуда стрелка компаса знает, где у Земли север, а где юг? Оказывается, Земля – тот же магнит, только шарообразный. Пришли к такому пониманию люди далеко не сразу (как и не сразу догадались, что наша Земля не плоская, а шарообразная). Вот как это произошло.

Древнегреческий философ Фалес в VI веке до новой эры описал удивительное явление, известное людям, вероятно, задолго до этого. Это явление – магнетизм. По одной из легенд, такое название оно получило от греческого города Магнезия (ныне он называется Манисса и находится в Турции), где был найден минерал, способный притягивать железо. Сейчас этот

минерал называется магнетитом, или магнитным железняком; он представляет собой соединение железа и кислорода. А вот кто и когда изобрел компас, неизвестно, хотя это изобретение – одно из величайших открытий человека. Возможно, кто-то случайно обнаружил, что если кусок магнетита вытянутой формы подвесить на нитке или пустить плавать на деревянной дощечке, то один его конец всегда будет показывать на север, а другой – на юг, как бы мы ни крутили нитку или дощечку. Раньше считали, что компас изобрели китайцы чуть ли не пять тысяч лет назад, однако первый китайский документ, в котором упоминается компас, датирован XI веком новой эры. Во всяком случае, еще в Средние века этим старинным открытием широко пользовались мореплаватели, определяя по примитивному компасу свой путь в открытом море. Со временем обнаружилось, что кусок магнетита может передавать свое «волшебное» свойство стальным предметам – например, иголке, из которой получится более удобный компас.

В 1269 году француз Пьер де Мерикур, по прозвищу Перегрин, написал книжку «Письма о магните», в которой собрал различные сведения о магните – как известные ранее, так и открытые им лично. Именно Перегрин, экспериментируя с магнитами, обнаружил, что у них есть два особых конца – два полюса. Поскольку они показывали на север и на юг, их так и назвали северным и южным полюсами магнита. Когда Перегрин подвесил на нитках близко друг к другу две магнитные стрелки, оказалось, что их одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются. Перегрин обнаружил еще одно важнейшее свойство магнитов: если разломить постоянный магнит на две части, получатся два новых магнита с двумя полюсами – северным и южным – у каждого. Получить какой-нибудь один полюс не удалось ни Перегрину, ни кому-либо после него. Это и есть ответ на вторую загадку. Почему так, будет рассмотрено дальше.

А теперь – ответ на третью загадку: намагнитить шар можно, и это обнаружил английский физик и врач Уильям Гильберт. В 1600 году он опубликовал книгу «О магните, магнитных телах и о большом магните – Земле». В ней он рассказал о своих экспериментах с магнитами. Вот что он обнаружил:

Магнит обладает в различных частях различной притягательной силой; на полюсах эта сила наиболее заметна. Магнит имеет два полюса: северный и южный, они различны по своим свойствам; разноименные полюса притягиваются, одноименные отталкиваются. Магнит, подве-

шенный на нитке, располагается определенным образом в пространстве, указывая север и юг. Невозможно получить магнит с одним полюсом: сколько ни разламывай магнит, каждый вновь полученный кусочек всегда будет иметь два полюса. Земной шар – большой магнит. При сильном нагревании магнитные свойства у природных и искусственных магнитов исчезают. Магниты оказывают свое действие через стекло, кожу и воду.

Но самый замечательный опыт Гильберт провел с намагниченным шаром, выточенным из минерала магнетита. У него тоже оказались два полюса – северный и южный, и, находясь около этого шара, стрелка компаса всегда показывала на эти полюса, т.е. вела себя так же, как в отношении Земли. Поэтому Гильберт назвал свой шар «тереллой», т.е. маленькой землей. Слово это происходит от латинского *terra* – земля; в русском языке немало слов с этим корнем: территория, терраса (уступ на склоне горы), террариум (помещение для земноводных), террикон (куча земли и пустой породы), терракота (обожженная глина), терренкур (размеченные дорожки для лечебной ходьбы, обычно в гористой местности), а также *terra incognita* – неведомая земля. Гильберт впервые догадался, что земной шар – тоже магнит, поэтому намагниченная стрелка компаса и показывает на полюса этого гигантского магнита.

А всегда ли стрелка компаса одним концом показывает на север, а другим – на юг? Оказывается – и это ответ на первую загадку, – не всегда. Если идти (ехать, плыть, лететь) к северному или южному географическому полюсу, то пока путешественник от него далеко, со стрелкой компаса обычно никаких неожиданностей не происходит. Но при приближении к полюсу стрелка начинает понемногу «сходить с ума». И моряки давно это заметили. В начале XVI века, когда была открыта Америка и корабли начали заплывать далеко на север, обнаружилось странное явление. Моряки знали, что в ясную ночь никакой компас им не нужен: направление на север показывает Полярная звезда. Но когда они сравнили это направление с показанием компаса, обнаружилось удивительное явление: чем дальше они заплывали на север, тем сильнее синяя стрелка компаса отклонялась от севера! Угол между осью стрелки компаса и точным направлением на полюс (оно совпадает с географическим меридианом) назвали *магнитным склонением*. Это склонение различно в разных точках земного шара. Что же происходит с компасом на северном полюсе? Оказывается, синяя часть стрел-

ки показывает в сторону северной части Канады. Там, на некоторой глубине, и находится в настоящее время один из магнитных полюсов Земли; другой же магнитный полюс расположен в Антарктике.

Почему так происходит, в точности неизвестно. Более того, установлено, что магнитные полюса Земли медленно передвигаются. Так, в Париже в 1580 году наблюдалось максимальное магнитное склонение к востоку от меридиана, оно составляло $9,5^\circ$. А через 230 лет, в 1810 году, было зафиксировано уже максимальное склонение в другую сторону – к западу от меридиана, и составило оно целых $22,3^\circ$. Значит, магнитные полюса Земли «гуляют», перемещаясь с места на место. Более того, очень редко – раз в тысячи лет – они меняются местами. Ученые не исключают, что в ближайшие сто-двести лет такое может вновь произойти. И трудно предсказать, как это отразится на живых существах.

Магнитное склонение часто имеет и местные отклонения – иногда очень сильные; их называют девиацией (от латинского *deviatio* – уклонение от пути). Например, знаменитая Курская магнитная аномалия вызвана залежами магнитной руды, которая действует на стрелку. Маленькие «магнитные аномалии» легко обнаружить и у себя дома, если неподалеку от компаса будут находиться железные предметы. Можно только представить, сколько неприятностей и даже несчастий приносили мореплавателям такие «местные аномалии». Ведь даже на деревянных парусных судах всегда было много железных предметов: пушки, ядра, якоря. Положение усугубилось после того, как на смену парусным судам пришли железные пароходы. В 1854 году страшное несчастье потрясло Великобританию: на восточном берегу Ирландии разбилось судно «Тэйлор» водоизмещением 2000 тонн с несколькими сотнями эмигрантов, направлявшихся в Америку. Большая часть пассажиров и команды погибла. А ведь это было новое судно, легко выдержавшее двухдневный шторм в начале плавания. Расследование показало, что виной всему – неправильное показание компаса, вызванное девиацией. Надо сказать, что современные компасы имеют специальные приспособления для уничтожения девиации.

А вот и очередная загадка. Если синий полюс магнита называют северным, а красный – южным, то синий конец стрелки компаса должен показывать не на север, а на юг: ведь притягиваются только разноименные полюса! Почему же синяя половинка стрелки компаса показывает не на юг, а на север? Если синий конец стрелки показывает на север, следовательно,

там находится южный магнитный полюс Земного шара, а в южном полушарии – северный магнитный полюс!?

Загадка четвертая. *Какой же магнитный полюс находится на севере земного шара?*

А теперь – более трудные загадки.

Загадка пятая. *Возьмите компас, освободите стрелку от зажима (он нужен для того, чтобы стрелка попусту не болталась и не стирала ось) и поднесите компас к массивному предмету из чугуна, например к батарее отопления. Вы увидите, что к верхней части батареи стрелка будет обращена синим концом, а к нижней части – красным. Как это объяснить?*

Этот опыт вполне можно показывать как фокус, причем вряд ли кто из присутствующих сразу сможет его разгадать. И чем севернее вы живете, тем более четко будет проявляться этот эффект.

Много лет назад одна из газет напечатала любопытную статью о том, как проходят вступительные экзамены в Московский физико-технический институт. Самым интересным оказался вопрос, который задали не экзаменаторы, а одна из поступающих (и такое случается).

Загадка шестая. *Девушка проделала дома опыт, результат которого показался ей странным: большая консервная банка отрывала от сильного магнита притянутую им железную кнопку. В чем тут дело?*

Это и в самом деле загадка. Консервные банки делают из жести, которая не намагничивается. А если она и «передает» действие постоянного магнита, с которым соприкасается, то уж, конечно, не может стать «сильнее» его и перетянуть кнопку на свою сторону. Но опыт показывает, что может!

Давайте проверим. Все, что нам потребуется, это достаточно сильный подковообразный магнит и два бруска из немагнитного железа (вернее, из малоуглеродистой стали, так как из чистого железа почти ничего не делают). С такими брусками удобнее ставить опыты, чем с кнопкой и консервной банкой. Один брусок должен быть небольшим – например, подойдет обыкновенный болт, который заменит кнопку, другой – массивным, он заменит банку.

Сначала убедимся, что ни болт, ни брусок не являются магнитами (вернее, не обладают остаточным магнетизмом, т.е. не могут сохранять намагниченность). Поднесем их поочередно на несколько секунд к постоянному магниту, а затем – к железным опилкам (их можно заменить мелкими немагнитными гвоздика-

ми, канцелярскими скрепками и т. п.). Опилки не должны притягиваться ни к болту, ни к бруску.

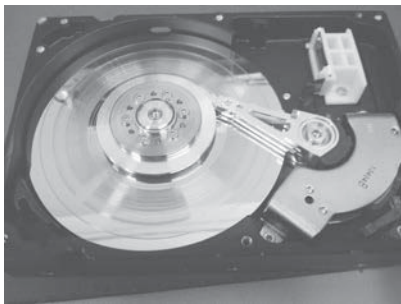
Теперь расположим немагнитный брусок вертикально, поставим на него болт и сверху поднесем магнит. При этом между нижним бруском и болтом тоже обнаружится притяжение – болт передает магнитное действие магнита. А дальше (внимание!) начинается самое интересное. Как вы думаете, что будет, если, придерживая брусок на месте, прикоснуться магнитом к болту, а затем потянуть магнит вверх? Ответ как будто очевиден: магнит оторвет болт от бруска. Ничего подобного – не оторвет, болт останется на месте. Станный результат... Может быть, болт слишком тяжел? Но тогда почему магнит легко поднимает его, когда снизу нет бруска?

Немного изменим опыт, для чего будет удобнее использовать магнит не в виде подковы, а прямой (полосовой): расположим магнит снизу, на него поставим болт, а сверху – брусок. Придерживая магнит, потянем немагнитный брусок вверх. Невероятно – болт отрывается от магнита и висит на бруске! И чем сильнее постоянный магнит (а также чем массивнее расположенный сверху брусок), тем выше можно поднять брусок с притянутым к нему болтом.

Абитуриентка была права: железо стало более сильным магнитом, чем постоянный магнит (с которым, кстати, оно даже не соприкасалось). Как же такое возможно?

Но сейчас настала пора разгадать тайну батареи отопления. Очевидно, что батарея намагничена, хотя и очень слабо – не удержит даже легкую скрепку. И намагнитить ее мог только один магнит – это сама Земля. Почему же южный магнитный полюс оказался у батареи сверху, а северный – внизу? (А вот в южном полушарии, например в Австралии, все будет наоборот.)

Разгадку дает простой эксперимент. Если хорошо намагниченную длинную спицу подвесить точно в центре тяжести (а это не так просто, поэтому лучше подвесить ненамагниченную спицу, а уже потом ее намагнитить), то можно заметить, что один ее конец норовит «клюнуть» вниз, а другой «задирает хвост». Чем ближе к северу, тем заметнее наклон спицы, а на экваторе наклон не наблюдается вовсе. Это явление, в отличие от магнитного склонения, называли *магнитным наклоном*. Его можно обнаружить и с помощью компаса, но необычного: стрелка компаса должна быть насажена не на вертикальную, а на горизонтальную ось (такой прибор называется инклинатором, от латинского *inclinare* – наклонять). Если же свободно подвешенную магнитную стрелку держать точно над магнитным полюсом (или



Данные на жестких дисках компьютеров записывают на тонких магнитных покрытиях

неподалеку от него), то она расположится вертикально и будет смотреть вниз.

Зная о том, что существует магнитное наклонение, легко понять, как именно намагнитилась батарея под действием «косого» магнитного поля Земли и почему верхняя и нижняя ее части представляют собой южный и северный полюса постоянного, хотя и слабенького, магнита. (Понятно так-

же, что в южном полушарии намагниченность будет противоположной.)

Если с помощью сильного постоянного магнита перемагнитить спицу, она, конечно, развернется в другую сторону. При этом тот ее конец, который был наклонен вниз, будет теперь приподнят. На севере Канады, например, наклон спицы будет очень сильным. А вот у стрелки обычного компаса магнитное наклонение практически не заметно – этому препятствует способ крепления стрелки на оси. Кроме того, эта стрелка слишком маленькая.

Теперь постараемся объяснить «фокус» с болтом, который отрывается от магнита.

Магнитные свойства вещества связаны с магнитными свойствами его атомов. У некоторых металлов (их называют ферромагнитными, от латинского названия железа – *Ferrum*) отдельные атомы-магнетики стремятся ориентироваться так, чтобы их одноименные полюса были направлены в одну сторону. Таким свойством при комнатной температуре обладают лишь железо, кобальт, никель и редкий металл гадолиний. Однако одинаковая магнитная ориентация атомов имеет место только в очень ограниченных областях металла, называемых доменами. Размеры этих мельчайших магнетиков-доменов составляют примерно 0,01–0,1 мкм. Если отшлифовать поверхность магнита и посыпать ее магнитным порошком, его частицы расположатся в основном по границам доменов, четко обозначив их контуры.

У куска чистого железа в целом нет собственного магнетизма, потому что «стрелки» разных доменов направлены в разные стороны и уничтожают действие друг друга. Поднесем теперь к куску железа магнит. Под его влиянием «стрелки» всех микро-

магнетиков, как по команде, повернутся в одну сторону. Исследования под микроскопом показали, что происходит это явление довольно любопытным образом: домены, которые случайно оказались «правильно» ориентированными, увеличиваются в размерах. Они присоединяют к себе, как бы «поедают», соседние домены, у которых направление собственной намагниченности оказалось «неправильным» относительно поднесенного магнита. В результате железо намагничивается. Максимальная намагниченность достигается, когда магнитные моменты всех доменов ориентированы в одну сторону — для этого нужен очень сильный внешний магнит.

Посмотрим, что произойдет, если убрать магнит. Если бы вместо чистого железа была стальная иголка, она так бы и осталась намагниченной: доменам в закаленной стали не очень просто выстроиться в одном направлении, но так же трудно и принять прежнюю ориентацию. Именно это свойство используют для создания постоянных магнитов. В них нужно ориентировать как можно больше доменов в одном направлении, но так, чтобы они потом сами собой не размагничивались (размагничивание происходит при сильных ударах и при нагреве до высокой температуры).

Понятно, что раз даже один атом магнита имеет северный и южный полюса, то невозможно изготовить магнит только с одним полюсом. Тем не менее, продолжают, хотя пока и безуспешно, экспериментальные поиски мельчайших «магнитных монополей», у которых есть только один полюс (по аналогии с тем, что электрические заряды можно разделить на положительные и отрицательные).

Первые постоянные магниты, которые изготавливали еще в XIX веке, делали из углеродистой, а затем из вольфрамовой стали. Магнит считался хорошим, если он мог удержать груз, масса которого равна его собственной. С середины 30-х годов XX века начали применять сплавы, которые по магнитным свойствам превосходили сталь в десять и более раз. Это были сплавы железа с никелем, алюминием, кобальтом, медью. В 1952 году появился сплав платины с кобальтом, магнитная энергия которого была еще выше. В 1969 году началось промыш-



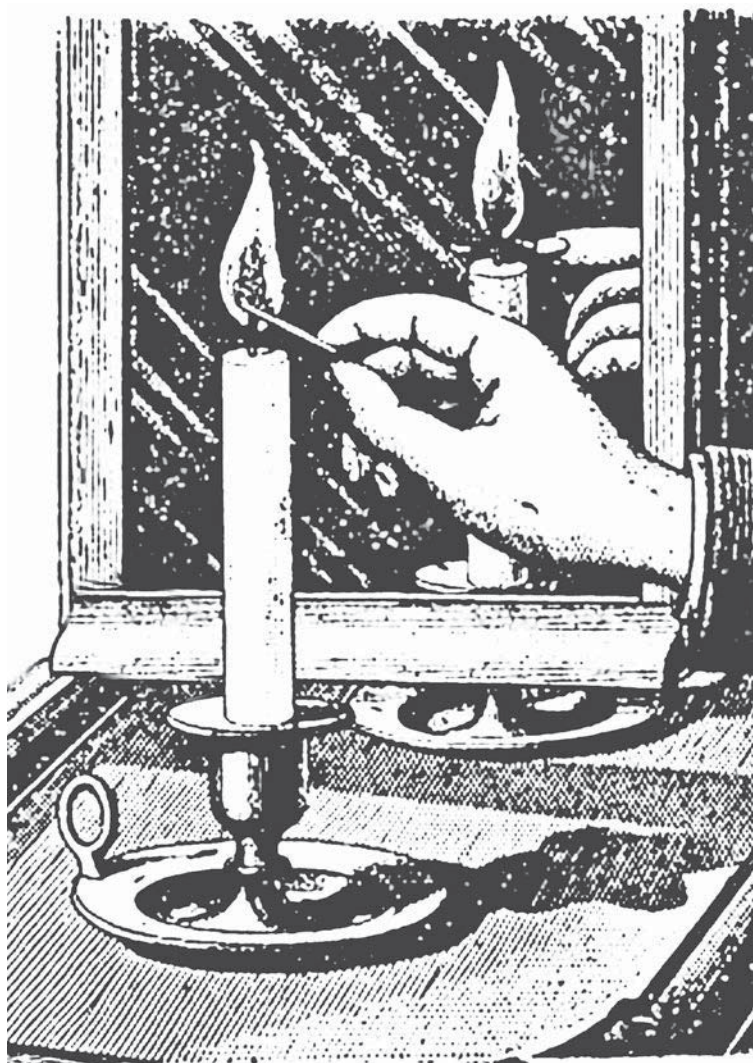
Простейший электромагнит: на ферромагнитный сердечник намотан электропровод в изоляции

ленное производство магнитов, способных удерживать груз, масса которого уже в сотни раз превышала их собственную. Такие магниты были сделаны из сплавов, содержащих редкие металлы – церий, празеодим, самарий. Сравнительно небольшой магнит из сплава самария с кобальтом, уместающийся на ладони, способен удержать небольшой автомобиль вместе с пассажирами. Секрет такого сплава в том, что он состоит из очень мелких сильно намагниченных частиц вытянутой формы, которые как бы вкраплены в слабомагнитное вещество. При изготовлении магнита эти частицы ориентируются в сильном магнитном поле преимущественно в одном направлении и дальше свою ориентацию не теряют, даже когда внешнее магнитное поле убирают.

В чистом железе, его называют «мягким», или в низкоуглеродистой стали, например в обычном гвозде, магнитные стрелки доменов переориентируются очень легко. Поэтому намагниченное железо даже не надо сильно нагревать или подвергать резким ударам – оно размагничивается само по себе, и довольно быстро. Но это же свойство доменов приводит к тому, что в сильном внешнем магнитном поле они почти все принимают одну ориентацию, и железо становится сильнейшим магнитом. Вот почему в нашем опыте достаточно массивный железный брусок стал более сильным магнитом, чем породивший его постоянный магнит.

Подобным свойством мягкого железа пользуются при изготовлении электромагнитов: довольно слабое магнитное поле катушки с током (соленоида) значительно усиливается, когда внутрь катушки вводят сердечник из мягкого железа. Из такого же железа делают и сердечники трансформаторов – ведь они должны быстро перемагничиваться, когда по обмоткам катушек течет переменный ток. Интересно, что мягкое железо за доли секунды размагничивается почти полностью. Это легко проверить в нашем втором опыте: отведите магнит в сторону – и болт сразу же упадет.

ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА



УВЕЛИЧИТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙКА

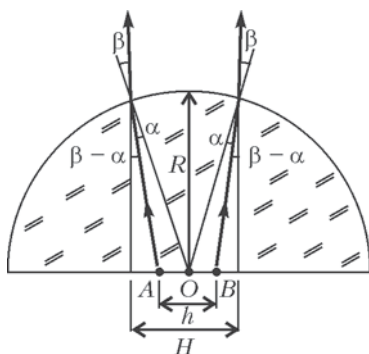
В.Дроздов

В отделе оптики одного рязанского торгового дома я увидел небольшую продолговатую картонную коробочку с надписью «BAR MAGNIFIER». Поинтересовался, что это. Оказалось – стеклянный полуцилиндр высотой 12 мм и длиной 150 мм, используемый для увеличения размеров букв в печатном издании. И действительно, в буквальном переводе название прибора означает «увеличительный брусок» (или «увеличительная полоска»).

Пользоваться увеличителем предписано так: передвигать по бумаге сверху вниз листа, при этом читаемая строчка должна находиться на оси цилиндра, половиной которого и является эта оптическая линейка.

Обнаружилось, что двухмиллиметровая буква кажется трехмиллиметровой, т.е. увеличение составляет 1,5. Поскольку 1,5 – типичный показатель преломления стекла, то возникла гипотеза: увеличение линейки равно показателю преломления стекла. Осталось теоретически подтвердить или опровергнуть эту гипотезу.

На рисунке изображено сечение увеличительной линейки плоскостью, перпендикулярной как плоской поверхности линейки, так и ее оси. Рассмотрим соответствующий ход лучей. Один



из них идет в наш глаз от верхней точки A некоторой буквы текста, другой – от нижней точки B этой буквы. Середина O буквы находится на оси. Обе высоты буквы – реальная h и увеличенная H – значительно меньше радиуса полуцилиндра R , поэтому углы α и β (падения и преломления лучей) можно считать малыми.

Из рисунка видно, что увеличение буквы равно

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{H/2}{h/2} = \frac{R \sin \beta}{R \sin \beta - R \sin (\beta - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta - \sin (\beta - \alpha)}.$$

Учтем, что синус малого (по сравнению с одним радианом) угла можно отождествить с его радианной мерой, и получим

$$\Gamma = \frac{\beta}{\beta - (\beta - \alpha)} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Теперь запишем закон преломления света на цилиндрической поверхности увеличительной линейки. В нашем случае свет переходит из оптически более плотной среды с показателем преломления n в воздух, у которого показатель преломления равен единице. Поэтому закон преломления будет выглядеть так:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n},$$

откуда

$$n = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом, $\Gamma = n$, т.е. наша гипотеза подтвердилась.

В заключение сделаем числовой расчет. В условиях опыта $\sin \beta = \frac{H}{2R} = \frac{1}{8}$. Тогда $\beta = 0,125329$ рад $\approx 7,18^\circ$. Точность приближенного равенства $\sin \beta \approx \beta$ составляет 0,26%. А точность равенства $\sin \alpha \approx \alpha$ еще выше ($\alpha = 4,78^\circ$). С целью лучшего восприятия рисунка углы α и β на нем сильно увеличены.

«НУЛЕВЫЕ» ЛИНЗЫ

В.Дроздов

Линзой называют прозрачное тело, ограниченное двумя поверхностями, преломляющими световые лучи, которое способно создавать оптические изображения предметов. Наиболее просты в изготовлении линзы со сферическими поверхностями. Если толщина линзы значительно меньше радиусов кривизны ее поверхностей, линза называется *тонкой*. Как известно, оптическая сила такой линзы D находится по формуле

$$D = (n - 1) \left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right),$$

где n – относительный показатель преломления материала линзы, R_1 и R_2 – радиусы кривизны сферических поверхностей. Перед слагаемыми в скобке знаки выбираются так: для выпуклой поверхности – «плюс», для вогнутой – «минус».

Приведенному определению линзы удовлетворяет, например, прозрачное тело, изображенное на рисунке 1. Одна его поверхность выпуклая, другая – вогнутая, радиусы кривизны поверхностей равны: $R_1 = R_2 = R$, а толщина мала: $l \ll R$. Разумеется, при этом центры кривизны обеих поверхностей не совпадают, а смещены на l . Значит, в соответствии с приведенной формулой, оптическая сила этой линзы равна нулю. Поскольку данная линза не будет ни собирающей, ни рассеивающей, назовем ее «нулевой».

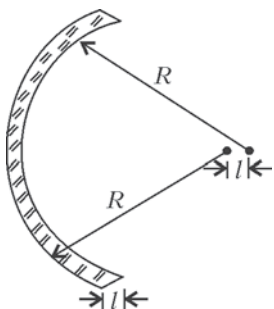
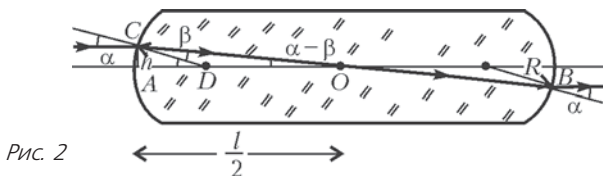


Рис. 1

Очевидно, что двояковыпуклая тонкая линза «нулевой» быть не может. Если, конечно, не поместить ее в жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления стекла. Но здесь мы молчаливо предполагаем, что наша линза находится в воздухе.

Интересно, а не существует ли двояковыпуклая «нулевая»

линза среди *толстых* линз? Допустим, что существует, и изобразим ее такой, как показано на рисунке 2. Возьмем радиусы кривизны сферических поверхностей одинаковыми: $R_1 = R_2 = R$,



а толщину линзы обозначим l . Очевидно, что линза симметрична относительно плоскости, проходящей перпендикулярно ее главной оптической оси через точку O – середину отрезка AB .

Пустим на линзу луч, параллельный главной оптической оси и находящийся на расстоянии $h \ll R$ от нее (параксиальный луч). Если после преломления луч пройдет через точку O , то, по соображениям симметрии, из линзы он выйдет параллельно входящему лучу. Это означает, что при таком условии толстая линза фокусировать лучи не будет, т.е. ее оптическая сила будет равна нулю.

Рассчитаем толщину нашей толстой «нулевой» линзы, т.е. выразим l через R и n . При этом синусы и тангенсы малых углов заменим значениями этих углов в радианной мере. По закону преломления луча, в точке C имеем $\alpha = n\beta$. Из треугольников AOC и ADC находим

$$\alpha - \beta = \frac{h}{l/2} = \frac{2h}{l}, \quad \alpha = \frac{h}{R}.$$

Делим почленно левые и правые части этих равенств:

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2R}{l}.$$

Из закона преломления выражаем отношение углов β и α :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}.$$

Дальнейшее ясно:

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{2R}{l}, \text{ и } l = \frac{2Rn}{n-1}.$$

Если взять, например, значение $n = 1,5$, то окажется, что $l = 6R$, т.е. «нулевая» линза будет весьма толстой.

Оказывается, линзы с нулевой оптической силой (афокальные линзы) находят свое практическое применение в сложных объективах в качестве компенсаторов аберраций.

ОПТИКА КОЛБЫ

В.Дроздов

Стеклянные колбы широко применяются в лабораторных работах по термодинамике. Однако интересно использовать колбу и как оптический прибор.

Попробуем «поймать» в фокус солнечные лучи пустой колбой. Ничего не получится – колба действует как рассеивающая линза. Теперь наполним колбу водой – она уже работает как собирающая линза и позволяет сфокусировать солнечные лучи.

Попробуем объяснить результаты этих опытов.

Колба, с которой проводился наш эксперимент, представляет собой сферу с внешним радиусом $R = 50$ мм и толщиной стенок $h = 1$ мм. Примем, что показатель преломления стекла $n_c = 1,5$.

Пустая колба представляет собой оптическую систему, состоящую из двух тонких линз, разделенных расстоянием $2R$ (рис.1). Оптическая сила каждой линзы равна

$$D = (n_c - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R - h} \right) = -(n_c - 1) \frac{h}{R(R - h)}.$$

Так как $h \ll R$, то правомерно считать, что

$$D = -\frac{(n_c - 1)h}{R^2}.$$

Соответственно, модуль фокусного расстояния одной линзы равен

$$|F| = \frac{R^2}{(n_c - 1)h}.$$

Легко видеть, что $|F| \gg 2R$. Поэтому, в первом приближении, можно суммировать оптические силы двух линз, как будто они

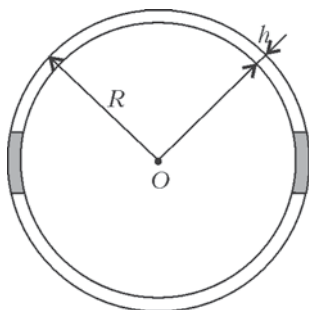


Рис. 1

расположены вплотную. Тогда оптическая сила D_k колбы, т.е. системы двух линз, будет равна

$$D_k = 2D = -\frac{2(n_c - 1)h}{R^2}. \quad (1)$$

Теперь понятно, почему пустая колба рассеивает световые лучи: $D_k < 0$.

Следующим шагом вычислим оптическую силу $D_{ш}$ водяного шара радиусом R (на самом деле, радиусом $R - h$, но $h \ll R$). Рассмотрим луч, идущий вблизи одной из главных оптических осей шара параллельно ей (рис.2). Место пересечения вышедшего из шара луча и оси – точка C – и есть фокус шара.

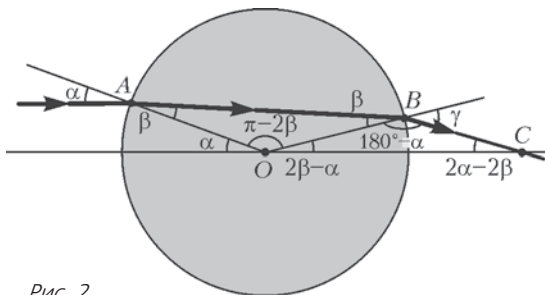


Рис. 2

Параксиальность лучей гарантирует нам, что углы α , β , γ будут малыми, т.е. значительно меньшими одного радиана. По закону преломления света, в точках A и B имеем соответственно

$$\sin \alpha = n_b \sin \beta, \quad n_b \sin \beta = \sin \gamma,$$

где $n_b = 4/3$ – показатель преломления воды. Отсюда получаем

$$\gamma = \alpha.$$

Применим к треугольнику OBC теорему синусов:

$$\frac{OC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin(2\alpha - 2\beta)}$$

и найдем фокусное расстояние шара:

$$F_{ш} = OC = \frac{R \sin \alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta)}.$$

Так как синус малого (в радианной мере) угла можно заменить самим углом, окончательно получим

$$F_{ш} = \frac{R\alpha}{2(\alpha - \beta)} = \frac{Rn_b\beta}{2(n_b\beta - \beta)} = \frac{Rn_b}{2(n_b - 1)}.$$

Факт отсутствия в этой формуле угла β говорит о том, что все параксиальные лучи собираются в одной точке C , т.е. мы нашли действительно фокус. Соответственно, оптическая сила водяного шара будет равна

$$D_{\text{ш}} = \frac{2(n_{\text{в}} - 1)}{Rn_{\text{в}}} . \quad (2)$$

Вернемся теперь к нашей колбе. Наполненная водой колба является весьма непростой для расчета оптической системой, последовательно состоящей из тонкой рассеивающей линзы, толстой собирающей линзы (шара) и второй тонкой рассеивающей линзы. Однако громоздких выкладок можно избежать. И вот как.

Из формул (1) и (2) найдем отношение модуля оптической силы пустой колбы и оптической силы водяного шара:

$$\frac{|D_{\text{к}}|}{D_{\text{ш}}} = \frac{n_{\text{в}}(n_{\text{с}} - 1)}{n_{\text{в}} - 1} \frac{h}{R} .$$

Для нашей экспериментальной колбы числовой расчет дает

$$\frac{|D_{\text{к}}|}{D_{\text{ш}}} = 0,04 , \text{ т.е. } |D_{\text{к}}| \ll D_{\text{ш}} .$$

Так что действительно не стоит удивляться тому, что оптически «положительный» водяной шар доминирует над оптически «отрицательной» стеклянной оболочкой, в которую он заключен. Физически естественно, что наполненная водой колба фокусирует солнечные лучи, действуя как собирающая линза.

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ЗЕРКАЛО-ТРУБКА

А.Андреев, А.Панов

Какую картину на экране может создать широкий пучок световых лучей после прохождения внутри цилиндрической трубки? Будем считать, что источник расположен в центре одного из торцов трубки (рис.1). Луч несколько раз отражается

от стенок трубки, выходит через другой конец трубки и попадает на экран. Радиус трубки равен r , длина трубки равна L и расстояние от трубки до экрана равно L' . Рисунок 1 показывает, что расчет траектории одного светового луча крайне

прост – это всего лишь закон отражения плюс элементарная геометрия. Но нас все-таки интересует не одиночный луч, а общая картина, которую создадут на экране все лучи, выходящие из источника.

Посмотрите на рисунок 2, на котором представлены две фотографии экрана, освещенного пучком света, прошедшим через трубку с внутренним радиусом $r = 4,5$ мм и длиной $L = 350$ мм. Экран располагался на расстояниях $L'_1 = 600$ мм и $L'_2 = 1200$ мм от конца трубки. На экране оба раза наблюдается четко выраженная дискретная кольцевая структура.

А вот две такие же картинки, рассчитанные с помощью геометрической оптики, изображены на рисунке 3. Внутри трубки случайным образом «запускались» примерно 10^5 световых лучей. Для каждого луча рассчитывалась его траектория, вплоть до пересечения с экраном, и в месте пересечения на черном экране ставилась белая точка.

Между рисунками 2 и 3 имеется очевидное сходство.

Итак, в каждом случае на картине присутствует дискретная

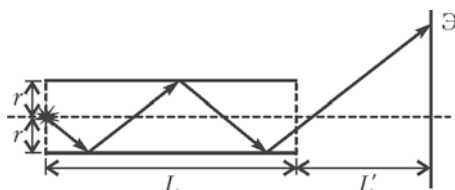


Рис. 1. Одиночный луч выходит из центра левого торца трубки и после нескольких отражений попадает на экран

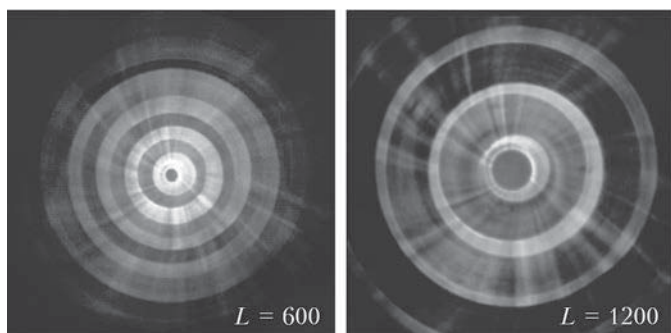


Рис. 2. Что видно на экранах, находящихся на разных расстояниях от трубки

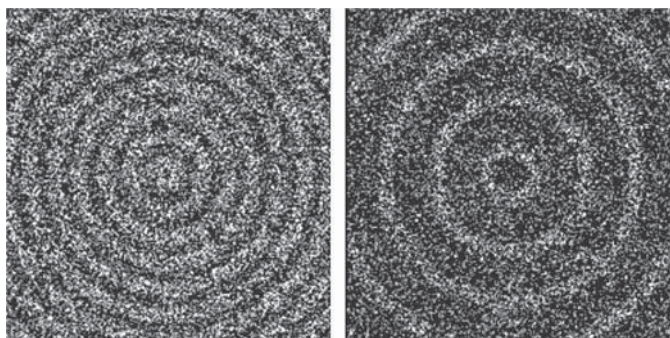


Рис. 3. Что дает геометрическая оптика для тех же расстояний до экра-

кольцевая структура, а единственный дискретный параметр в нашей задаче – это количество отражений светового луча внутри трубки. Поэтому хорошо бы было понять, какую именно картину формируют на экране лучи с фиксированным числом отражений. Физически такое выделение может и затруднительно, но в компьютерном эксперименте это делается совсем просто.

Рассмотрим случай $L' = 600$ мм и отдельно посмотрим, что дают лучи с четным числом отражений и что с нечетным. На рисунке 4 слева видно, что лучи с четным числом отражений порождают систему непересекающихся световых колец. Аналогичную систему порождают и лучи с нечетным числом отражений (см. рис.4 в середине). При этом все световые кольца имеют одинаковую ширину и все промежутки между кольцами тоже одинаковой ширины. Теперь становится понятным, откуда берутся узкие яркие кольца на рисунках 2 и 3 – это просто

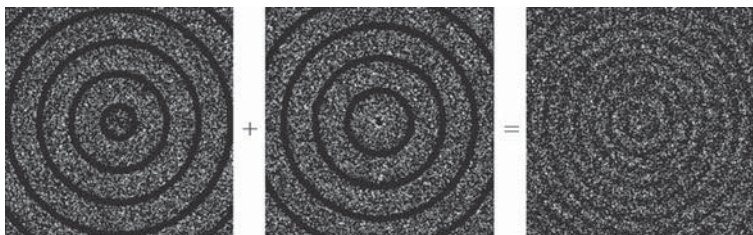


Рис. 4. Сложение картин от четного и нечетного числа отражений

попарные пересечения соседних колец, порожденных лучами с k и $k + 1$ отражениями (см. рис.4 справа).

Для правильного понимания общей картины следует рассчитать радиусы колец, сформированных лучами с k отражениями. Начнем с $k = 0$ (рис.5).

Видно, что лучи, не испытывающие отражений внутри трубки, заполняют на экране целый круг радиусом R_0 . Сделаем то же самое для лучей, испытавших внутри трубки ровно одно отражение (рис.6). На этот раз лучи заполняют на экране кольцо с радиусами r_1 и R_1 . Мы можем продолжить эти построения и с помощью элементарной геометрии получить нужный результат.

Итак, лучи, испытавшие $k > 0$ отражений, формируют на экране кольцо с внутренним радиусом r_k и внешним радиусом R_k , при этом

$$r_k = \left((2k - 1) \frac{L'}{L} - 1 \right) r, \quad R_k = \left((2k + 1) \frac{L'}{L} + 1 \right) r.$$

Теперь мы можем вычислить ширину k -го кольца $\Delta = R_k - r_k$ и ширину пересечения соседних колец $\delta = R_k - r_{k+1}$:

$$\Delta = 2r \left(\frac{L'}{L} + 1 \right), \quad \delta = 2r.$$

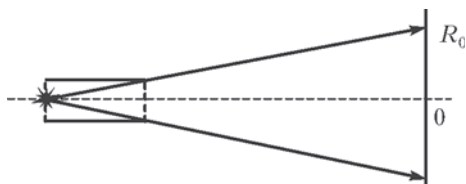


Рис. 5. Лучи, не испытавшие ни одного отражения, заполняют на экране круг

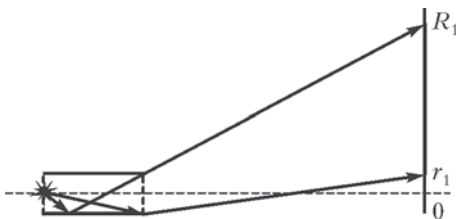


Рис. 6. Лучи, отраженные по одному разу, создают на экране светлое кольцо

Мы видим, что ширина колец Δ действительно не зависит от k и линейно растет с ростом L' . А ширина пересечения соседних колец δ , она же ширина узких ярких полос на рисунках 2 и 3, и вовсе постоянна – не зависит ни от k , ни от L' и равна диаметру трубки.

Сделаем еще одно замечание. Картина на экране выглядит достаточно простой, когда мы находимся в «дальней зоне», т.е. при $L' > L$ (как на рисунках 2 и 3). В случае же $L' = L$ и система четных колец, и система нечетных колец, каждая по отдельности, заполняют плоскость экрана полностью и без пересечений – в каждую точку экрана попадают ровно два световых луча. Картина усложняется в «ближней зоне», когда $L' < L$. Там ширина колец становится меньше $2r$, и они накладываются друг на друга более сложным образом. Кроме того, величина внутреннего радиуса первого кольца r_1 там отрицательна, а с уменьшением L' и внутренние радиусы других колец тоже становятся отрицательными. Что бы это значило?

Поэкспериментируйте и постарайтесь самостоятельно ответить на этот вопрос.

УДИВИТЕЛЬНЫЙ УГОЛ ПАДЕНИЯ

А.Стасенко

Как известно, вампиры становятся к зеркалу под углом Брюстера.

Однажды на лекции в МФТИ

В этой шутке Лектор использовал народное поверие о том, как выявить вампира среди живых людей: он не отражается в зеркале.

Оказывается, подобное явление вполне возможно в физике – электромагнитная волна, в частности оптического диапазона, т.е. свет, при определенных условиях не отражается от гладкой поверхности, целиком проходя внутрь тела. Что же это за условия?

Рассмотрим все по порядку. Уж если волна электромагнитная, то в ней должны быть электрическое и магнитное поля. Далее, известно, что векторы индукции магнитного поля \vec{B} и напряженности электрического поля \vec{E} в плоской бегущей волне перпендикулярны друг другу и направлению ее распространения – так называемому волновому вектору \vec{k} (рис.1). Последний

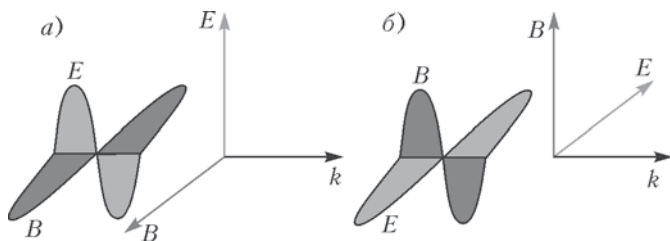


Рис. 1. Бегущая электромагнитная волна может быть поляризована в одном из двух направлений

факт означает, что волна поперечно поляризована, причем возможны два независимых направления поляризации. Например, рисунок 1 показывает, что в этих направлениях поляризации вектор \vec{E} может колебаться в вертикальной или в горизон-

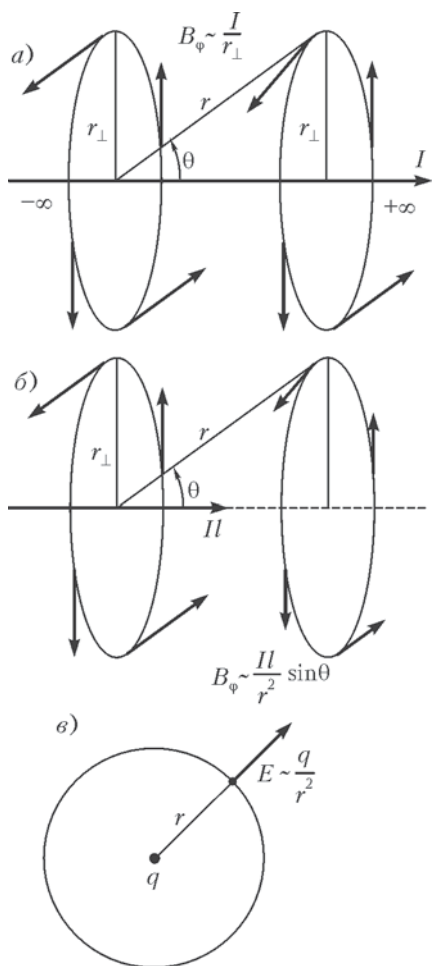


Рис. 2. Статические магнитное и электрическое поля

сказать, что при фиксированном r_{\perp} он должен уменьшаться с уменьшением угла θ , а на продолжении отрезка l (при $\theta = 0$) обращаться в ноль (легко видеть, что $\frac{r_{\perp}}{r} = \sin \theta$). И вполне разумно предположить, что магнитное поле будет по-прежнему пропорционально силе тока I , но теперь также и длине отрезка l . В результате этих наводящих рассуждений мы придем к

тальной плоскости. И оказывается, волны с разными направлениями поляризации неодинаково взаимодействуют с поверхностью твердого тела.

Обратимся теперь к рисунку 2. В случае а) изображено магнитное поле бесконечного проводника с током силой I . Линии вектора магнитной индукции — окружности, сам вектор поля касателен к ним и имеет единственную (азимутальную) составляющую B_{ϕ} , одинаковую по модулю на одном и том же расстоянии r_{\perp} от провода. И каждый отличник знает, что для бесконечного провода

$$B_{\phi} \sim \frac{I}{r_{\perp}}.$$

Выделим теперь небольшой участок провода длиной l с тем же током I , т.е. рассмотрим элемент тока $\bar{I}l$ (рис.2,б). Понятно, что линии поля \bar{B} будут по-прежнему окружностями. Но также понятно, что теперь модуль B_{ϕ} будет неодинаков на расстояниях r_{\perp} и r . Можно

выводу, что для элемента тока

$$B_{\varphi} \sim \frac{Il}{r^2} \sin \theta.$$

К этому же выводу несколько раньше нас пришли и несколько знаменитых физиков, отчего полученное выражение называется законом Био–Савара–Лапласа.

На рисунке 2,б приведено сопоставление со статическим электрическим полем \vec{E} точечного заряда q . Напряженность этого поля тоже прямо пропорциональна порождающему его агенту – заряду, обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда, но направлена по радиусу:

$$E \sim \frac{q}{r^2}.$$

На самом деле, все, что нам нужно из этих рассуждений для понимания оптики вампиров, – это то, что элемент тока \vec{Il} не создает магнитного поля в направлении тока.

Но может ли существовать такой «кусочек тока»? Конечно, в статических условиях – нет. Поэтому свяжем его с колебательным движением заряда q со скоростью v :

$$Il = qv.$$

Действительно, по крайней мере, слева и справа размерности одинаковы:

$$A \cdot m = \frac{\text{Кл}}{c} \cdot m = \text{Кл} \cdot \frac{m}{c}.$$

Только такое движение и может породить электромагнитную волну. Но может ли она распространяться вдоль направлений, соответствующих углам $\theta = 0$ или $\theta = \pi$? Предположим, как древние греки (доказательство от противного), что может. Но тогда вектор \vec{E} должен быть перпендикулярен этим направлениям (см. рис.1,а). А как он будет направлен? В плоскости рисунка 2,б? Или перпендикулярно ей? Или под каким-то углом? Получается, что единственная для него возможность – быть равным нулю. Это рассуждение еще раз подтверждает, что антенна или колеблющийся диполь не излучают энергию вдоль движения зарядов (рис.3).

Теперь мы легко поймем, что свет вокруг нас поляризован, во всяком случае частично.

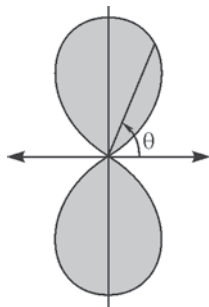


Рис. 3. Колеблющийся диполь (антенна) не излучает в направлении колебаний

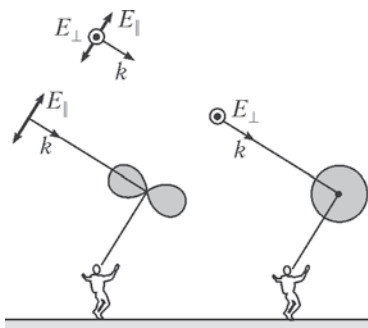


Рис. 4. Солнечный свет содержит оба направления поляризации

излучающие диполи (как говорится, происходит рассеяние на флуктуациях плотности молекул). Но в выбранном нами направлении эти маленькие «антенны», возбужденные полем \vec{E}_{\parallel} , не посылают к нам энергию, а те «антенны», которые возбуждены вектором \vec{E}_{\perp} , посылают. Поэтому, как легко убедиться, именно в этом

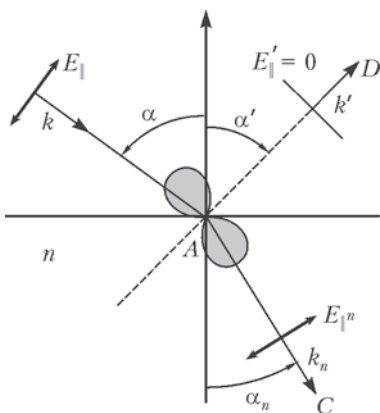


Рис. 5. Волна, поляризованная в плоскости падения, не отражается, если угол падения удовлетворяет условию Брюстера

направлении небо имеет самый синий цвет. Но, конечно, это результат многократного рассеяния, и наблюдаемый нами свет поляризован лишь частично.

А что получится, если заранее поляризованный свет \vec{E}_{\parallel} (в вертикальной плоскости) падает на гладкую поверхность тела с коэффициентом преломления n (рис.5)? Тут ясно виден случай, когда угол между преломленным лучом \vec{k}_n (линия AC) и отраженным лучом \vec{k}' (линия AD) может оказаться равным 90° . Это значит, что диполи вещества, возбужденные падающим светом, ничего не излучают в направлении AD.

Энергия полностью уходит в преломленный луч.

Легко получить значение угла падения α , при котором происходит это интересное явление. Согласно закону преломле-

ния (закону Снеллиуса), направления падающего и преломленного лучей связаны соотношением $\sin \alpha_n = \frac{\sin \alpha}{n}$, а направление отраженного луча определяется законом отражения $\alpha' = \alpha$ (угол падения равен углу отражения). А кроме того, как мы уже поняли, $\angle CAD = 90^\circ$, так что $\alpha_n = \pi - \alpha' - \pi/2 = \pi/2 - \alpha$. Подставляя последнее соотношение в закон преломления, получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{n},$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = n.$$

Это простое выражение, называемое законом Брюстера (в честь открывшего этот закон английского физика Дейвида Брюстера), позволяет измерять коэффициент преломления даже непрозрачных веществ. Направьте луч, поляризованный в плоскости падения, на поверхность тела и, изменяя угол его падения, заметьте, когда исчезнет отраженный луч. Этот угол и оказывается углом Брюстера.

Очень интересный угол падения!

СИРЕНЕВЫЙ ТУМАН...

А.Стасенко

Именно так начинается известная старая песня:

Сиреневый туман над нами проплывает,
Над тамбуром горит полночная звезда...

Но почему туман оказался *сиреневым*?

Или вот еще из А.С.Пушкина («Буря»):

Ты видел деву на скале
В одежде белой над волнами...
Когда луч молний озарял
Ее всечасно блеском алым...

Как же так: одежды – белые, луч молний еще белее, а в результате – блеск *алый*! Не связано ли это с тем, что «бушуя в бурной мгле, играло море с берегами ... и ветер бился и метал», т.е. с присутствием морских брызг и капель?

Но заглянем еще дальше назад – в глубь веков. В китайских и римских (оцените расстояние!) хрониках 186 года сообщается о *красном* небе. И что же? Оказывается, в ту пору произошло извержение вулкана ... в Новой Зеландии! – вообще в другом полушарии.

А в более близкие к нам времена, в 1950 году, на большей части Европы Солнце и Луна казались *голубыми* после пожаров в лесах... Канады!

Тут уж явно возникает подозрение о взаимодействии света с мелкими частицами.

Но – все по порядку. Представим себе, что футбольный мяч радиусом r освещается параллельными лучами света интенсивности I (рис.1,*а*). Тогда на белой стене появится четкий диск тени, причем это ступенчатое распределение интенсивности света с точки зрения геометрической оптики должно быть одинаковым на любом расстоянии мяча от стенки.

А что если на пути тех же параллельных лучей поместить непрозрачный экран с отверстием радиусом r (рис.1,*б*)? В этом случае на белой стенке получим картину, дополнительную к

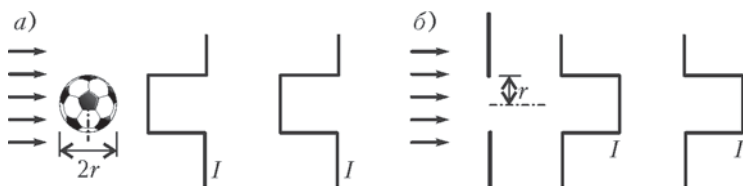


Рис. 1. Распределение интенсивности света за мячом и за отверстием (геометрическая оптика)

первой. Дополнительно в том смысле, что если вставить мяч в отверстие, то суммарная интенсивность света станет равной нулю.

Однако, это справедливо с точки зрения геометрической оптики. В ней ни слова нет о длине волны света λ , а ведь именно она определяет восприятие цвета – сиреневый, алый, красный, синий... Чем больше λ , тем волна «краснее», чем меньше – тем «синее». Представим себе то же самое отверстие радиусом r в непрозрачном экране состоящим из двух половинок площадью $\pi r^2/2$ каждая (рис.2). Согласно принципам волновой (уже не геометрической!) оптики, эти две половинки фронта волны, падающей слева на отверстие, можно считать двумя независимыми источниками вторичных волн.

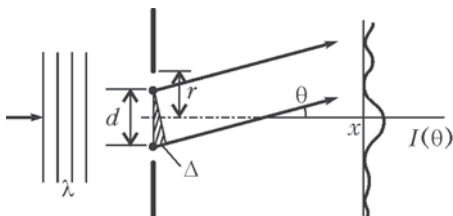


Рис. 2. Интерференция от двух полудисков. Слева – падающий фронт волны (с длиной λ), справа – картина распределения интенсивности за отверстием

С этой идеи и начинается изложение принципа Френеля – великого оптика, жившего во времена Наполеона, Александра I и Пушкина.

Рассматривая картину издали, будем считать, что эти две половинки излучают вторичные волны как два точечных источника, расположенных в «центре тяжести» каждого из полудисков. Расстояние между этими двумя точками обозначим буквой d . Тогда в направлении, соответствующем углу θ , одна из этих двух волн отстанет от другой на отрезок $\Delta = d \sin \theta$ (см. заштрихованный прямоугольный треугольник на рисунке 2). И тут возникают две возможности – эта разность хода может стать равной целому числу длин волн, т.е. четному числу длин

полуволн: $\Delta = m\lambda = 2m \frac{\lambda}{2}$ или нечетному числу длин полуволн:

$\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$. Ясно, что в первом случае в направлениях, соответствующих углам

$$\theta_{\max}^m = \arcsin \frac{m\lambda}{d}, \quad (*)$$

эти две волны усилят друг друга, во втором – погасят.

Таким образом, картина распределения интенсивности света, прошедшего через отверстие, т.е. так называемая интерференционная картина, принципиально отличается от той, что предсказывает геометрическая оптика. Где же правда!?

С одной стороны, мы ясно видим резкую тень от луча на стене. С другой стороны, те, кто занимаются радиофизикой, точно знают, что круглая антенна радиусом r , посылающая волну на спутник, собирает энергию в пучок с характерным полууглом раствора порядка $\arcsin \frac{\lambda}{2r}$ при $n = 0$ (направление на 1-й минимум), а не в виде «ступеньки», как на рисунке 1,б. Ясно, что тут дело в отношениях размеров. Одно из них мы уже знаем – это дифракционный параметр $\frac{\lambda}{r}$. Очевидно, что другое отношение должно быть связано с тем, «близко» или «далеко» находится экран от отверстия. Измеренное в радиусах отверстия это расстояние x дает еще один безразмерный параметр $\frac{x}{r}$. И в результате получится, что геометрическая оптика права при $\frac{\lambda x}{r^2} \ll 1$, а волновая – при $\frac{\lambda x}{r^2} \gg 1$. Некоторые говорят, что геометрическая оптика верна при $\lambda \rightarrow 0$. Понятно, что это утверждение справедливо при фиксированных значениях x и r .

Но вернемся к сиреневому туману, деве на скале, синему и красному небу. Если рассмотренное выше отверстие закрыть диском или шариком того же радиуса, то свет всюду за восстановленным непрозрачным экраном исчезнет. Значит, с точки зрения дополнительной картины, на оси за одиночным шариком должна быть волна, в точности компенсирующая (гасящая) волну, которая была за отверстием в экране. Интенсивности этих двух волн одинаковы, а фазы противоположны. Двести лет назад мысль о том, что за непрозрачным экраном должно быть светлое пятно, казалась нелепой. Тем более потрясающим оказался демонстрационный опыт Араго, сделавший этот факт очевидным.

Итак, волны огибают края шарика. Это явление называется дифракцией волн на краю препятствия. Более того, оказалось, что в дифракционном пределе ($r \ll \sqrt{\lambda x}$) из параллельного пучка лучей дифракция «изымает» столько энергии, что шарик представляется имеющим площадь сечения $2\pi r^2$, т.е. вдвое большую, чем с точки зрения геометрической оптики. Говорят при этом, что коэффициент рассеяния равен двум: $Q_s = 2$.

Далее. Ясно, что с уменьшением размера шарика должна уменьшаться и доля рассеиваемой им энергии — ведь при стремлении его размера к молекулярному эта доля должна стремиться к нулю, иначе атмосфера была бы непрозрачна для солнечных лучей. А в результате связь сечения рассеяния с коэффициентом рассеяния имеет вид, качественно показанный на рисунке 3. Тут нет ничего удивительного: видна периодичность по $\frac{r}{\lambda}$, так напоминающая соотношение (*); видно стремление к нулю при $\frac{r}{\lambda} \rightarrow 0$. И, конечно, виден вполне ожида-

емый максимум, когда длина волны сравнима с размером шарика. Кстати, в случае водяных капель этот максимум почти в четыре раза превышает геометрическое сечение большого круга ($Q_s \approx 4$).

Теперь все понятно. Поскольку белый свет молний или солнца содержит непрерывный набор длин волн, то радиус частиц или капель, рассеивающих этот свет, может оказаться соответствующим максимальному значению A на рисунке 3 при длине волны красного света, в то время как соседний минимум B окажется соответствующим синему цвету ($\lambda_{\text{син}} < \lambda_{\text{красн}}$) — вот и получается «блеск алый». А сиреневый цвет — это смесь красного и фиолетового (проверьте на акварельных красках). Он может получиться, когда размеры капель таковы, что мы одновременно попадаем в два соседних максимума A и C .

Остальные случаи необычных окрасок запыленного неба Читатель сможет теперь объяснить самостоятельно.

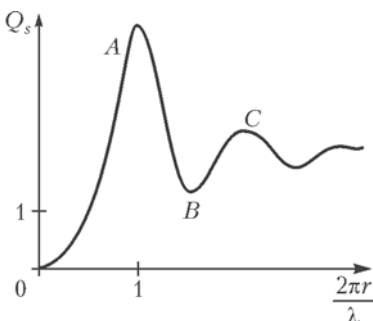


Рис. 3. Качественная картина взаимосвязи коэффициента рассеяния и дифракционного параметра

ЗАЧЕМ «БЛИЗОРУКО ЩУРИТЬСЯ», ИЛИ ДИФРАКЦИЯ НА ОТВЕРСТИИ

А.Стасенко

*Кажется, запой у него под самым ухом
Патти, напади на Россию полчища китайцев,
случись землетрясение, он не пошевелится...
и преспокойно будет смотреть
прищуренным глазом в свой микроскоп.*

А.П.Чехов

Часто симпатичные девушки «близоруко щурятся», чтобы разглядеть и узнать собеседника. Но нигде ни о ком не сказано: «дальнозорко щурится». Несомненно, в этом различии слов скрыт какой-то физический факт.

Как известно, хрусталик глаза преломляет лучи падающего на него света так, чтобы они сфокусировались на сетчатке (рис.1). У «близорукого» глаза пересечение лучей происходит

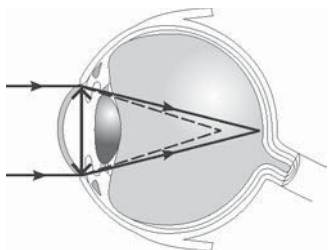


Рис. 1. Двойная стрелка изображает хрусталик глаза — линзу, собирающую лучи на сетчатке

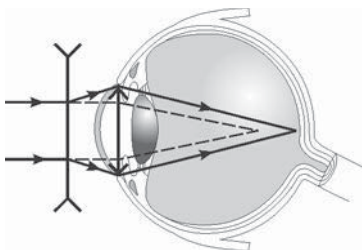


Рис. 2. Рассеивающая линза перед глазом «раздвигает» лучи так, что после преломления в хрусталике они фокусируются на сетчатке

до сетчатки (штриховые линии на рисунке 1). Поэтому используется рассеивающая линза, помогающая лучам пересечься на сетчатке глаза, а не до нее (сравните штриховые и сплошные линии на рисунке 2). Но если близорукий человек использует «прищуривание», значит, он достигает того же

эффекта, что и при использовании рассеивающей линзы. В чем же тут физика?

А дело в том, что пора перейти от геометрической оптики к волновой. Ведь свет есть электромагнитные волны, важнейшей характеристикой которых является длина волны λ , т.е. расстояние, проходимое волной за один период T со скоростью c :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

($\nu = \frac{1}{T}$ – частота волны, измеряемая в обратных секундах, или герцах).

Что же произойдет, если волну с плоским бесконечным фронтом заставить пройти через щель шириной d ? Неужели эта щель вырежет кусок плоского фронта и картина будет такой, как на рисунке 3,а? Оказывается, нет. Волна после щели «разбрызгивается» в стороны, как показано на рисунке 3,б. А как оценить угол «разбрызгивания» θ ?

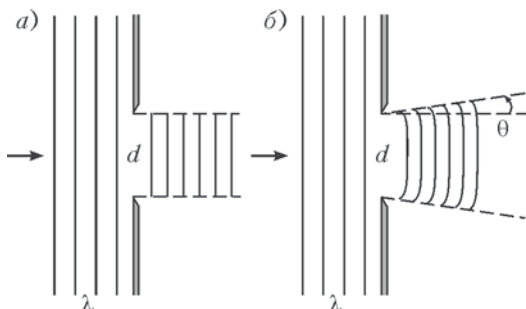


Рис. 3. а) Неправильная картина прохождения плоской волны через щель в экране; б) качественно правильная картина

Тут ответ подсказывает всесильная Теория Размерностей и Подобия: поскольку кроме ширины щели d появилась еще длина волны λ той же размерности (а искомый угол безразмерен), то можно ожидать, что $\theta \sim \lambda/d$. А почему не d/λ ? Да потому, что с увеличением d это «разбрызгивание» становится все менее заметным – вступает в силу геометрическая оптика.

Однако пора признаться, что слово «разбрызгивание» в физике заменено термином «дифракция».

Итак, всякая волна на краях щели в экране дифрагирует, и ее крайние «лучи» отклоняются тем сильнее, чем больше отношение λ/d .

Но, может быть, вдумчивого Читателя не устраивают сообра-

жения размерностей? Тогда обратимся к рисунку 4. Тут щель условно представлена в виде двух полущелей – их середины обозначены крестиками и отстоят друг от друга на $d/2$. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, каждую из полущелей можно

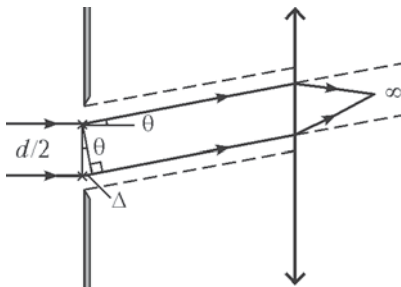


Рис. 4. К интерференции лучей от двух полущелей

представить в виде источника цилиндрической волны. Эти две волны «на бесконечности» (которую можно приблизить при помощи собирающей линзы) встретятся с той же разностью хода

$\Delta = \frac{d}{2} \sin \theta$, которую они приобрели в плоскости щели. И что же случится, если эта разность хода будет равна $\lambda/2$? А то, что при этом угле θ волны погасят друг друга и условие погашения будет иметь вид

$$\frac{d}{2} \sin \theta_{\min}^{(1)} = \frac{\lambda}{2}.$$

Понятно, что если длина волны не слишком близка по величине к ширине щели ($\lambda/d \ll 1$), то синус угла приблизительно равен самому углу (в радианах):

$$\theta_{\min}^{(1)} \approx \frac{\lambda}{d},$$

что мы и ожидали на основе теории размерностей.

Но почему тут поставлен верхний индекс (1)? А потому, что это условие погашения реализуется и при других углах $\theta_{\min}^{(n)}$, для которых сдвиг фаз равен нечетному числу полуволин:

$$\sin \theta_{\min}^{(n)} = (2n - 1) \frac{\lambda}{d}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так что еще более правильная картина будет выглядеть сложнее, чем на рисунке 3,б (попробуйте ее нарисовать самостоятельно). Угловое распределение интенсивности прошедшего через щель

сигнала (диаграмма направленности) качественно изображена на рисунке 5. Понятно, что максимумы соответствуют условию

$$\sin \theta_{\max}^{(m)} = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Надо заметить, что наши рисунки относятся к большим расстояниям x от щели. А что значит «далеко»? Ведь если к щели, на которую свет падает слева, приложить справа лист бумаги или расположить его совсем близко, то на нем появится резкая полоса без всяких следов дифракции. Значит, существует еще безразмерный параметр, отсчитывающий расстояние от щели в длинах волн: x/λ . Так что полная картина определяется обоими параметрами, а именно величиной

$$p = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{x}{d}.$$

И если p много больше единицы, то к соответствующим значениям x и относятся приведенные картинки. А между $p \gg 1$ и $p \ll 1$ лежит более сложная для описания область, которую можно будет понять, поступив в Московский физико-технический институт.

Но вернемся к прищуриванию. Теперь понятно, что уменьшение ширины щели играет ту же роль, что и использование рассеивающей линзы (см. рис.2). Не случайно в средние века театральные дамы лорнировали сцену при помощи щелевых очков. Конечно, дифракция происходит и на ресницах прищуренных век, при этом «разбрызгивание» света наблюдается в горизонтальной плоскости. И, конечно, щурятся также просто от яркого света, чтобы уменьшить поток энергии на сетчатку.

Кстати, дифракция должна происходить и на входном зрачке любого глаза (он ведь тоже вырезает кусок фронта волны). Значит, параллельные лучи и в самом здоровом глазе соберутся на сетчатке не в точку (как обещает геометрическая оптика), а в кружок, радиус которого приближенно равен

$$r \approx \frac{\lambda}{d} D,$$

где D – диаметр глазного яблока, d – диаметр зрачка.

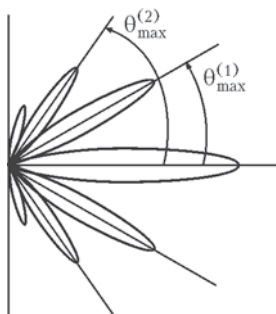


Рис. 5. Диаграмма направленности

Природа распорядилась так, что глаз человека имеет наиболее четкое изображение на сетчатке при диаметре зрачка $d = 3$ мм. Это связано с размером светочувствительных клеток. Так называемое желтое пятно, на которое проецируются изображения, выстлано пятнадцатью тысячами колбочек. Это площадка с угловым размером $1,5^\circ \approx 1/40$ рад. Значит, на каждую клетку-колбочку приходится угол

$$\alpha = \frac{1}{40 \cdot \sqrt{15000}} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

А угол дифракции при $d = 3$ мм равен

$$\theta_{\min}^{(1)} = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \text{ рад} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад},$$

т.е. он того же порядка, что и угол α .

Можно еще раз удивиться, как мудро природа «приладила» друг к другу все эти характерные размеры для условий жизни в лучах Солнца!

СТОЛКНОВЕНИЯ, РАССЕЯНИЕ И НЕБЕСНЫЕ ЗНАМЕНА

А. Стасенко

В эпоху войн и мятежей «видения» и «небесные знамена» всегда пристально фиксируются и наблюдаются современниками. Спустя пять лет после избрания Михаила Романова в Европе началась Тридцатилетняя война. Явилась и комета, которая, по общему мнению, эту войну предвещала. Видения и пророчества заполнили и католические, и протестантские страны. Им верили короли, полководцы и монахи, безграмотные простолюдины и просвещенные мужи.

История русской литературы X–XVII веков

Ровно сто лет тому назад английский физик Эрнест Резерфорд объявил потрясенному миру: атом – пустой, в его центре находится массивное ядро с размером в десять тысяч раз меньше размера самого атома; вокруг ядра вращаются легкие электроны. Все это очень похоже на Солнечную систему, поэтому модель атома Резерфорда была названа планетарной моделью. Она явилась фундаментальным прорывом в понимании строения вещества.

Однако начнем с самого простого – со столкновения двух абсолютно упругих шариков. Их «абсолютная упругость» означает полное отсутствие потерь механической энергии. Пусть шарики летят навстречу друг другу с одинаковыми (по модулю) скоростями, но с не равным нулю прицельным расстоянием h . На рисунке 1, *a* они изображены за мгновение до столкновения. Но если шарики совершенно одинаковы (и по массе, и по размеру) и их скорости тоже одинаковы (в «лабораторной» системе координат, связанной с неподвижным листом бумаги, на котором изображен рисунок), то их центр масс неподвижен (в этой системе координат). Разложим скорость каждого шарика на две составляющие – вдоль линии их центров и вдоль касательной к поверхностям обоих шариков в точке соприкосновения (штрихо-

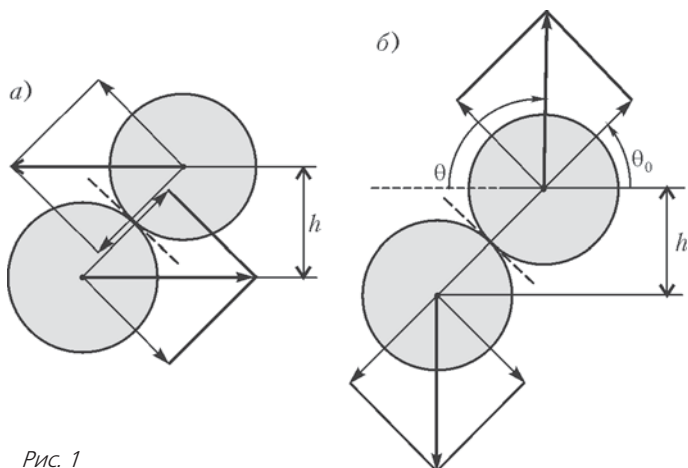


Рис. 1

вая линия). Ясно, что через мгновение после упругого столкновения радиальные составляющие скоростей обоих шариков изменятся на противоположные, а касательные останутся прежними (рис.1,б). Результат столкновения полностью аналогичен случаю, при котором каждый шарик зеркально отражается от тяжелой плиты, поверхность которой изображена штриховой линией. Складывая снова обе составляющие скорости каждого шарика, видим, что первоначальный вектор каждой скорости повернулся на угол

$$\theta = \pi - 2\theta_0 = \pi - 2\arcsin \frac{h}{2R}, \quad (1)$$

где R – радиус шариков. Физики говорят, что произошло рассеяние шариков друг на друге.

Полученная зависимость качественно показана на рисунке 2 (читатель при желании может точно рассчитать эту кривую).

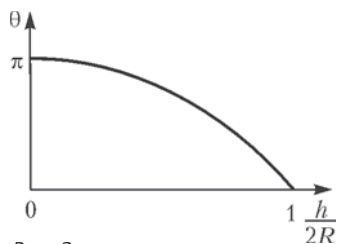


Рис. 2

Видно, например, что если прицельное расстояние равно нулю ($h = 0$), то происходит лобовое столкновение (так называемое центральное соударение) и шарики разлетаются строго «назад», т.е. $\theta = \pi$. А при $h = 2R$ они, едва коснувшись друг друга, летят в прежнем направлении, т.е. $\theta = 0$.

В рассмотренном случае предполагалось, что шарики взаимодействуют только в момент соприкосновения. Однако в реальности тела «чувствуют» друг друга и при любом удалении. Конечно, речь идет прежде всего об электростатическом (кулоновском) и гравитационном (ньютоновском) взаимодействиях. Как известно, в обоих случаях силы взаимодействия изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между точечными объектами (размеры которых много меньше этого самого расстояния). Только при кулоновском взаимодействии возможно как притяжение (разные знаки зарядов тел), так и отталкивание (одинаковые знаки), а при гравитационном – только притяжение.

И вот, сотню лет назад Резерфорд, а затем Гейгер, Марсден и Чэдвик стали «обстреливать» α -частицами (ядрами гелия), вылетающими из радиоактивного источника, листки тонкой фольги из разных тяжелых металлов (золота, платины, серебра, меди). Рассеивающее ядро металла намного массивнее α -частицы, к тому же оно «вморожено» в кристаллическую решетку. Было установлено, что большинство α -частиц проходят через фольгу почти без отклонений, но встречались редкие случаи их отброса «почти назад» ($\theta \approx \pi$). Это было похоже на лобовое столкновение α -частицы с ядром, соответствующее нулевому прицельному расстоянию. Результаты экспериментов говорили о том, что заряды α -частиц и ядер имеют одинаковые знаки и что ядра очень маленькие. Исходя из планетарной модели атома, Резерфорд построил картину рассеяния α -частиц на ядрах металлов. На рисунке 3 изображены траектории α -частицы для трех значений прицельного расстояния h (черная точка – это массивное ядро). Записав привычные для механики законы сохранения энергии и момента импульса (взаимодействие упругое), можно получить выражение для угла θ (в системе

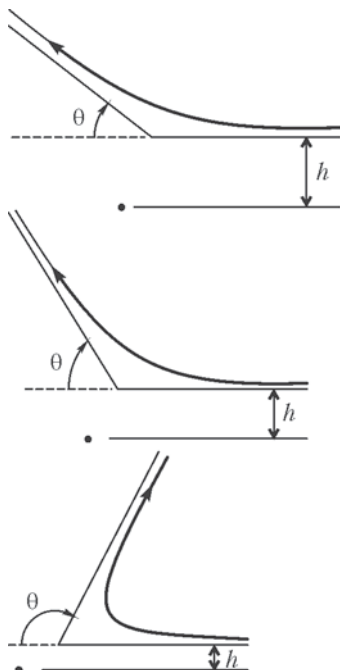


Рис. 3

единиц СГС):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv_{\infty}^2 h}{2Ze^2},$$

где $2e$ и Ze – заряды α -частицы и рассеивающего ядра соответственно, m – масса α -частицы, v_{∞} – ее скорость «на бесконечности», e – элементарный заряд.

Планетарная модель атома оказалась весьма плодотворной, а фундаментальные опыты описаны во многих книгах. В частности, в классической монографии Арнольда Зоммерфельда «Строение атома и спектры» α -частицы рассматриваются как ...кометы в поле тяготения Солнца!

А как устроены кометы (рис.4)? Твердое ядро обычно имеет радиус $r_{\text{я}}$ менее 10 км (в большинстве случаев даже менее 1 км),

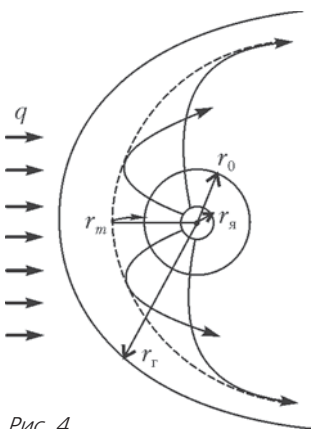


Рис. 4

и его удавалось заметить с Земли только в очень сильные телескопы. Когда комета приближается к Солнцу (т.е. в перигелии ее орбиты), солнечное излучение нагревает ядро, что приводит к испарению его материала с образованием газообразной головы и хвоста, которые уже легко наблюдаемы. За один «проход» теряется всего около 1% вещества кометы, так что ее массу можно считать почти постоянной. Тем более что она может пополняться путем захвата кометой новых порций массы на «холодных» участках сильно вытянутой орбиты кометы.

Согласно одной из моделей, комета состоит из смеси замороженных углеводородов и микрочастиц метеоритной пыли, когда-то слипшихся друг с другом под действием гравитации. С приближением к Солнцу до расстояния приблизительно $(2 - 4) \cdot 10^5$ км происходит нагревание этого рыхлого пористого тела, что и приводит к испарению его материала и выбросу микрочастиц, которые ускоряются испаряющимся газом. А поскольку ядро кометы вращается, это испарение и вынос микрочастиц можно считать сферически симметричными. Радиальная скорость газов для известной кометы Галлея была оценена в 0,5 км/с, а температура поверхности – в 150–250 К.

Вообще говоря, кометы бывают разных типов, и поведение любой из них может быть весьма прихотливым. Поэтому здесь изображен лишь некоторый осредненный портрет кометы.

Видимый диаметр головы кометы составляет $r_r \sim 10^5 - 10^6$ км, что на много порядков больше ее ядра. В этой области происходит радиальный разлет газа и ускоренных им микрочастиц, причем из-за быстрого расширения газа (концентрация которого $n \sim 1/r^2$) длина свободного пробега его молекул резко растет ($\sim r^2$), так что они перестают сталкиваться друг с другом и с микрочастицами. В результате радиус r_0 поверхности, на которой микрочастицы достигают предельной скорости, ограничен приблизительно десятком радиусов самого ядра (10–100 км). И микрочастицы продолжали бы лететь в радиальном направлении, если бы не поток квантов солнечного излучения (и, конечно, корпускул солнечного ветра).

Попробуем описать движение микрочастиц, эмитируемых кометой, в поле солнечного излучения. Как известно, каждый из фотонов обладает энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$ (h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме, ν – частота). Предположим, что все фотоны, падающие на диаметрально сечение шаровой микрочастицы площадью πa^2 , поглощаются частицей. Тогда если плотность потока излучения (сумма фотонов всех частот) составляет q ($[q = \text{Вт/м}^2]$), то сила, действующая на частицу (или поток импульса всех поглощенных ею фотонов), равна $q \frac{\pi a^2}{c}$. Значит, уравнение динамики микрочастицы (второй закон Ньютона) будет иметь вид

$$m \ll g \gg = q \frac{\pi a^2}{c}.$$

Поскольку масса микрочастицы равна $m = \frac{4}{3} \pi \rho^0 a^3$, где ρ^0 – плотность материала частицы, искомое ускорение равно

$$\ll g \gg = \frac{3}{4} \frac{q}{\rho^0 a c}.$$

Если комета находится от Солнца на расстоянии, равном среднему радиусу орбиты Земли, т.е. одной астрономической единице (1 а.е. = 150 млн км = $1,5 \cdot 10^8$ км), то $q = 1400 \text{ Вт/м}^2$. Тогда для ускорения микрочастицы радиусом $a = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$ и плотностью $\rho^0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ в поле солнечного излучения получим такую оценку:

$$\ll g \gg = \frac{3 \cdot 1400}{4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м/с}^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Пусть все микрочастицы, ускоренные потоком газов вблизи ядра кометы, получают одинаковую радиальную скорость $v_0 = 100$ м/с (порядка, но меньше тепловой скорости молекул). Если считать, что за время существенного искривления траектории микрочастицы (под действием фотонов Солнца) ускорение « g » изменяется незначительно, то задача сводится к нахождению траекторий точечных масс в поле с постоянным ускорением «тяготения». Значит, в этом приближении все траектории будут параболой. Та микрочастица, которая вылетела строго навстречу потоку излучения, до остановки и поворота назад пройдет расстояние

$$r_m = \frac{v_0^2}{2\langle g \rangle} = \frac{10^4}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \text{ м} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ м} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Соответствующее время будет равно

$$t_m = \frac{v_0}{\langle g \rangle} = \frac{10^2}{3 \cdot 10^3} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 10 \text{ ч}.$$

За это время ядро кометы пролетит расстояние много меньшее 1 а.е., что и оправдывает наше предположение о постоянстве « g », а заодно и о почти постоянном значении скорости самого ядра кометы в поле тяготения Солнца. (Последнее замечание позволяет считать инерциальной систему координат, связанную с ядром кометы, относительно которой и проведено рассмотрение траекторий микрочастиц.)

Полученная оценка r_m показывает, что все траектории микрочастиц будут лежать глубоко внутри головы кометы (видимой в основном благодаря рассеянию света на ее молекулах). А искривление траекторий микрочастиц вполне можно назвать их рассеянием на солнечном свете. Ситуация похожа на то, как если бы артиллерист стал стрелять во всех направлениях под всеми углами. Он получил бы множество параболических траекторий (естественно, без учета сопротивления воздуха), «накрытых» сверху поверхностью, касательной к этим траекториям, – так называемой огибающей поверхностью (рис.5).

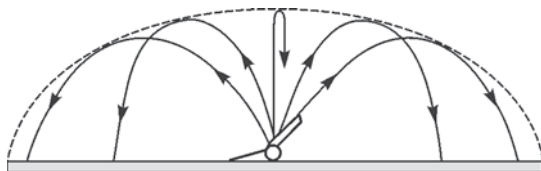


Рис. 5

Но неужели сама комета безразлична к покидающим ее частицам? Вспомним, что для каждого гравитирующего тела радиусом R и массой M существует так называемая скорость убегания, или вторая космическая скорость, равная

$$v_2 = \sqrt{2g_R R},$$

где $g_R = GM/R^2$ – ускорение свободного падения у его поверхности. В нашем случае с кометой

$$g_R = G \cdot \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{я}} r_{\text{я}}.$$

Здесь мы уже приготовились подставить плотность ядра кометы $\rho_{\text{я}} \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$ и его радиус $r_{\text{я}} \sim 10^3 \text{ м}$. Тогда получается

$$g_R \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 \text{ и } v_2 \approx 0,75 \text{ м/с}.$$

Для Земли значения этих параметров равны $9,8 \text{ м/с}^2$ и $11,2 \text{ км/с}$ соответственно.

Сравним еще полученное ускорение с другим – с ускорением w , которое поток несущего газа сообщает частице радиусом a и массой m . Как известно, оно пропорционально произведению площади поперечного сечения частицы πa^2 , плотности газа $m_{\text{г}} n$ и квадрата скорости u обтекания частицы газом:

$$w \approx \frac{\pi a^2 m_{\text{г}} n u^2}{m} \approx \frac{3 m_{\text{г}} n u^2}{4 \rho^0 a}.$$

Здесь $m_{\text{г}} = N_{\text{г}} m_p$ – масса молекулы газа, $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ – масса нуклона, $N_{\text{г}}$ – число нуклонов в молекуле газа. (Из последнего соотношения видно, в частности, что чем меньше частица, тем больше ее ускорение – ведь с уменьшением линейного размера объем и масса падают быстрее, чем площадь поперечного сечения.) Для «стандартных» молекул, истекающих из ядра кометы – циана CN и угарного газа CO , – число нуклонов равно 26 и 28 соответственно. Примем $N_{\text{г}} \approx 30$. Тогда для микронной частицы с радиусом $a \sim 10^{-6} \text{ м}$ и начальной скоростью газа на поверхности кометы (приобретающей скорость звука на выходе из ее многочисленных пор) $u = u_R \sim 200 \text{ м/с}$ при концентрации молекул у поверхности ядра (по астрономическим данным) $n \sim 10^{12} - 10^{14} \text{ см}^{-3}$ получим $w \sim 0,5 - 50 \text{ м/с}^2$. С удалением от ядра и сила притяжения, и концентрация молекул несущего газа быстро падают (обратно пропорционально квадрату расстояния от центра ядра). Полученные оценки подтверждают, что расширяющийся газ действительно может придать захваченным частицам большую

скорость за короткое время на небольшом расстоянии от поверхности ядра, после чего они в течение гораздо более продолжительного времени подвергаются воздействию только солнечного излучения.

Конечно, все это лишь приблизительные оценки. С одной стороны, сечение рассеяния света шаровой частицей может превосходить геометрическое сечение πa^2 . С другой стороны, не обязательно весь поток энергии, проходящий через это сечение, поглотится частицей — часть энергии рассеется и добавится к тому молекулярному рассеянию солнечного света, благодаря которому комета и кажется громадным «видимым ничто» (по выражению французского физика Жака Бабинэ), ибо сквозь ее голову (а тем более сквозь хвост) просвечивают даже слабые звезды. А еще Солнце испускает и элементарные частицы (корпускулярный ветер), которые тоже рассеиваются на потоках вещества, испускаемых кометами.

Итак, всюду столкновения, взаимодействия, рассеяние...

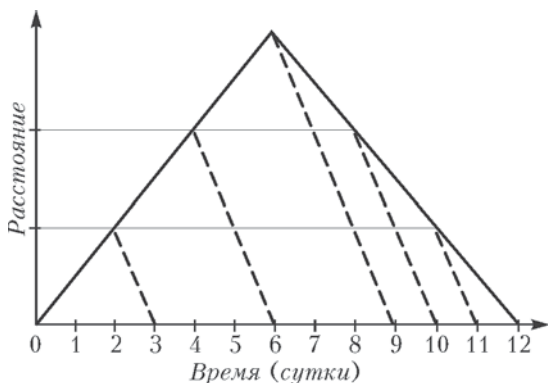
ЛЕГЕНДА ОБ ИСКАЖЕНИИ СИГНАЛА

С.Дворянинов

Однажды фараон снарядил экспедицию для разведки нового торгового пути, строго-настроив приказав начальнику отряда отправлять гонца с донесением в первопрестольную через каждые двое суток. Не смели ослушаться подчиненные этого приказа. Точно по расписанию садился очередной гонец на коня и направлялся в столицу к фараону. Каково же было изумление начальника отряда, когда после удачного возвращения могущественный владыка встретил его с мрачным видом и обвинил в непослушании. Оказывается, гонцы начали прибывать к нему с интервалом в трое суток, а под конец ни с того ни с сего вдруг стали появляться через каждые сутки.

История умалчивает о дальнейшей судьбе начальника экспедиции. А какое можно было бы придумать оправдание, оказавшись на его месте?

Приведем один из возможных вариантов. На рисунке показаны графики движения экспедиции (сплошная ломаная) и гонцов (пунктирные параллельные отрезки). Скорость гонцов в два раза превышает скорость экспедиции. Из рисунка видно, что гонцы с донесением, которые отправлялись точно в соответствии



с приказом фараона через двое суток, прибывали в столицу сначала с интервалом в трое суток, а затем через сутки.

История грозного фараона является красивой наглядной иллюстрацией известного физического эффекта – *эффекта Доплера* (точнее – продольного эффекта Доплера), который имеет огромное научное и практическое значение.

В 1842 году Кристиан Доплер (1803–1853) дал математическое описание следующему наблюдаемому эффекту. Пусть имеются источник, испускающий волну, и наблюдатель, принимающий эту волну. Тогда если источник или наблюдатель движутся относительно неподвижной среды так, что расстояние между ними меняется, то частота (период) волны, принимаемой наблюдателем, отличается от частоты излучаемой волны. Так, если расстояние между источником и наблюдателем уменьшается, то частота принимаемой волны оказывается больше, чем частота испускаемой, т.е. частота увеличивается, а если расстояние увеличивается, то частота уменьшается. Именно этот эффект проявился в описанной выше правдивой истории: пока отряд (источник сигналов-гонцов) удалялся от фараона (неподвижного наблюдателя), частота приема сигнала уменьшалась, а когда отряд стал приближаться к фараону, частота увеличивалась. Правда, в тексте речь шла не о частоте испускания и приема сигналов, а об обратной величине – периоде, т.е. об интервале времени между испускаемыми или принимаемыми сигналами.

Какими же формулами описывается эффект Доплера? Начнем с нашей истории, т.е. со случая, когда источник движется, а наблюдатель неподвижен. Пусть $v_{\text{и}}$ – скорость, с которой источник удаляется от наблюдателя, $T_{\text{и}}$ – период испускания сигналов, V – скорость сигнала. К моменту испускания следующего сигнала предыдущий сигнал перемещается в сторону наблюдателя на расстояние $VT_{\text{и}}$, а сам источник проходит в противоположном направлении расстояние $v_{\text{и}}T_{\text{и}}$. Значит, расстояние между двумя сигналами (двумя гонцами, двумя гребнями волны) равно $\lambda = (v_{\text{и}} + V)T_{\text{и}}$. Поскольку оба сигнала движутся со скоростью V , то интервал времени между приемами этих сигналов неподвижным наблюдателем равен

$$T_{\text{н}} = \frac{\lambda}{V} = T_{\text{и}} \frac{V + v_{\text{и}}}{V}.$$

Если источник приближается к наблюдателю, то скорость источника в этой формуле надо считать отрицательной. В описанной истории скорость отряда $v_{\text{и}}$ была в два раза меньше скорости гонцов V , поэтому период приема (время между прибытиями

гонцов) сначала в полтора раза увеличивался, а потом в два раза уменьшался.

Рассмотрим теперь второй вариант: источник неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью v_n (если наблюдатель приближается к источнику, то $v_n < 0$). Такому варианту соответствовала бы история, в которой фараон путешествует, а его помощники шлют к нему из столицы гонцов с информацией. В этом случае изменение периода описывается немного другой формулой. Расстояние между сигналами равно теперь $\lambda = VT_n$, а время между приемами двух последовательных сигналов составляет

$$T_n = \frac{\lambda}{V - v_n} = T_n \frac{V}{V - v_n},$$

Если, как и в первой истории, скорость отряда с фараоном будет в два раза меньше скорости гонцов, то при удалении отряда период увеличивается в два раза, а при приближении отряда к столице период приема уменьшается и составляет $2/3$ от периода испускания (отправки гонцов из столицы).

Если же движутся и источник, и наблюдатель, то изменение периода описывается такой общей формулой:

$$T_n = T_n \frac{V + v_n}{V - v_n},$$

где v_n – скорость удаления источника от наблюдателя, v_n – скорость удаления наблюдателя от источника. Соответствующая формула для частоты $\nu = 1/T$ имеет вид

$$\nu_n = \nu_n \frac{V - v_n}{V + v_n}.$$

Отметим, что все приведенные формулы относятся к случаю движения вдоль одной прямой.

Эффект Доплера для звуковых волн легко, например, обнаружить, наблюдая за приближающейся электричкой. Если мимо железнодорожной платформы проносится гудящий поезд, то сначала слышен высокий звук (частота звуковой волны на слух воспринимается как высота звука), затем, по мере удаления поезда, звук становится все ниже и ниже.

Эффект Доплера проявляется и по отношению к электромагнитным волнам, в частности – к распространению света. Правда, в этом случае формулы для эффекта Доплера несколько видоизменяются. Электромагнитные волны распространяются в вакууме, а не в среде, и в ответ может входить только относительная скорость наблюдателя и источника v . Поэтому вместо двух

формул – для движения наблюдателя и для движения источника – остается только одна:

$$v_{\text{н}} = v_{\text{и}} \sqrt{\frac{V - v}{V + v}}.$$

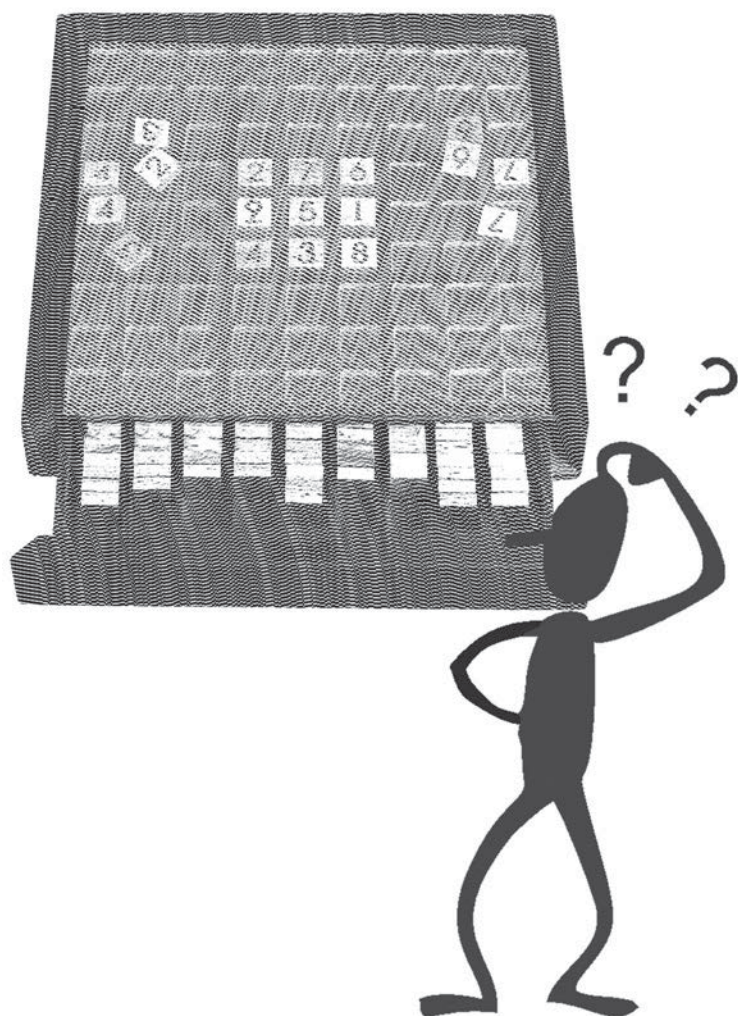
Эта формула выводится в рамках специальной теории относительности.

Представим, что на коне мчится всадник, держащий в руках фонарь зеленого цвета. Частоты световых волн возрастают при переходе от красного цвета к фиолетовому. Так вот, если всадник с зеленым фонарем удаляется от нас, то цвет воспринимаемого нами света будет казаться нам менее зелеными и более желтым.

Но об этом можно говорить только теоретически: дробь $\frac{v}{V}$ для скоростей света $V = 300000$ км/с и всадника $v \ll V$ настолько мала, что ее вряд ли стоит принимать в расчет. Другое дело – космические объекты: галактики, удаляющиеся от нас с огромными скоростями. В световом спектре галактик приборы регистрируют смещение в сторону красного цвета, значит, галактики разбегаются друг от друга, что свидетельствует о расширении Вселенной.

Поскольку эффект Доплера позволяет измерять скорость недоступного источника излучения волн по смещению их спектральных линий, то он становится удобным инструментом во многих областях науки и техники: в астрофизике, спектроскопии, радио- и гидролокации и других.

ОБЩЕЕ



ФИЗИЧЕСКОЕ СУДОКУ

Е. Соколов

Знаменитая серия гравюр японского художника Кацусики Хокусая (1760–1849) называется «Тридцать шесть видов Фудзи». Тридцать шесть разных точек выбрал художник, чтобы по-разному увидеть священную Фудзиюму (рис.1).



Рис. 1. «Стелется по ветру дым над вершиной Фудзи, в небо уносится и пропадает бесследно. Словно указывает мне путь» (Сайгё, XII век)

С разных точек зрения можно рассматривать и те ситуации, которые возникают в физических задачах. Обычно мы смотрим на них с «динамической» точки зрения: выясняем, как перемещаются тела, кто на кого действует, куда направлены скорости и ускорения. Но можно взглянуть на происходящее и с другой, «энергетической» точки зрения. И тогда мы увидим другие, не менее важные процессы – процессы превращения и изменения энергии.

Энергетический метод рассуждений важен и полезен. Бывает, что он позволяет легко находить ответы тогда, когда динамический подход бессилён. А в таких разделах физики, как «Термодинамика» или «Ядерная физика», энергетический метод рассуждений часто оказывается единственно возможным.

Сделать энергетические решения простыми и наглядными позволяет «Физическое sudoku». Это таблица, в клетки которой следует записывать значения энергетических величин (энергии и работы), используя различные законы физики (рис.2).

Сейчас мы на самых разных примерах покажем, как работает «Физическое sudoku». Первый пример – из «Механики».

Задача 1. Камень массой 1 кг бросают вертикально вверх с башни высотой 40 м. Камень поднимается еще на высоту 10 м и

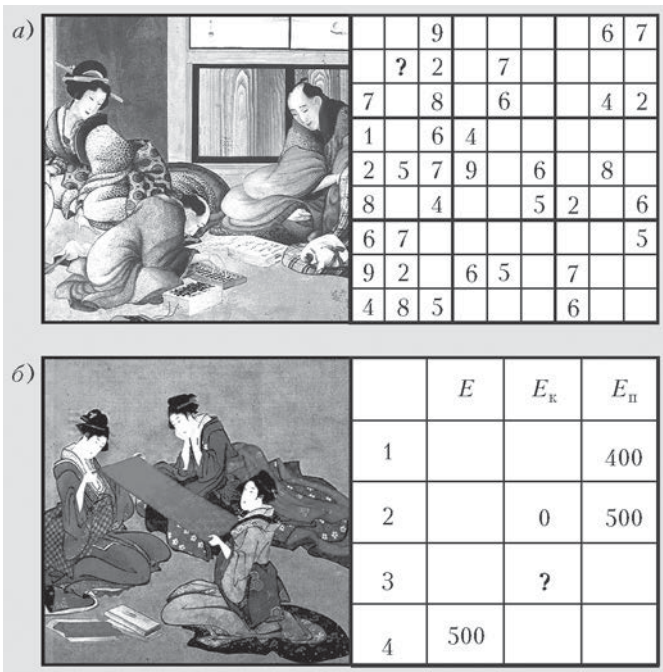


Рис. 2. а) Обычное «Судоку» заполняют, используя математические правила. б) Для заполнения «Физического sudoku» используют физические законы

падает вниз. Чему будет равна кинетическая энергия камня в тот момент, когда она станет равной потенциальной? Потенциальная энергия отсчитывается от поверхности земли.

Это известная экзаменационная задача. Давайте, чтобы лучше проиллюстрировать наш метод, добавим к ней несколько дополнительных вопросов: чему равна начальная кинетическая энергия камня; чему равна максимальная кинетическая энергия камня; чему равна максимальная потенциальная энергия камня?

Обсуждение. Какие энергетические величины нам имеет смысл рассмотреть?

– Конечно, кинетическую и потенциальную энергию, – ответят все. А мы подскажем: «Полезно ввести еще и полную механическую энергию».

– А какие положения камня будет полезно рассмотреть?

– Наверное, все, указанные на рисунке 3,а: начальное, самое высокое, искомое и самое низкое.

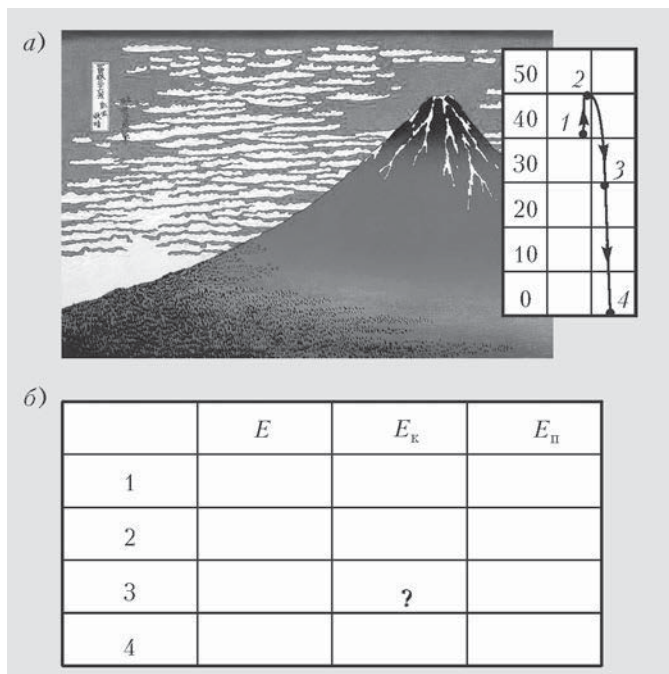


Рис. 3. Гравюра «Красная Фудзи» и таблица «Физического sudoku» для задачи 1

– Все правильно. И у нас с вами получится таблица «Физического sudoku» (рис.3,б) для нашей задачи. Правда, в ней пока еще ничего нет. Только знак вопроса отмечает клетку, в которой должен стоять ответ на основной вопрос задачи. Приступаем к заполнению таблицы.

Решение. Просим на сцену две первые формулы – для потенциальной и кинетической энергий:

$$E_{\text{п}} = mgh, \quad E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Какие клетки мы можем заполнить с их помощью?

Формула для потенциальной энергии работает в нашей задаче очень эффективно (рис.4,а). С ее помощью можно рассчитать потенциальную энергию в трех точках, высота которых известна. Это начальная точка 1 ($h_1 = 40 \text{ м}$), самая высокая точка 2 ($h_2 = 50 \text{ м}$) и самая низкая точка 4 ($h_4 = 0$). Три клетки заполнены.

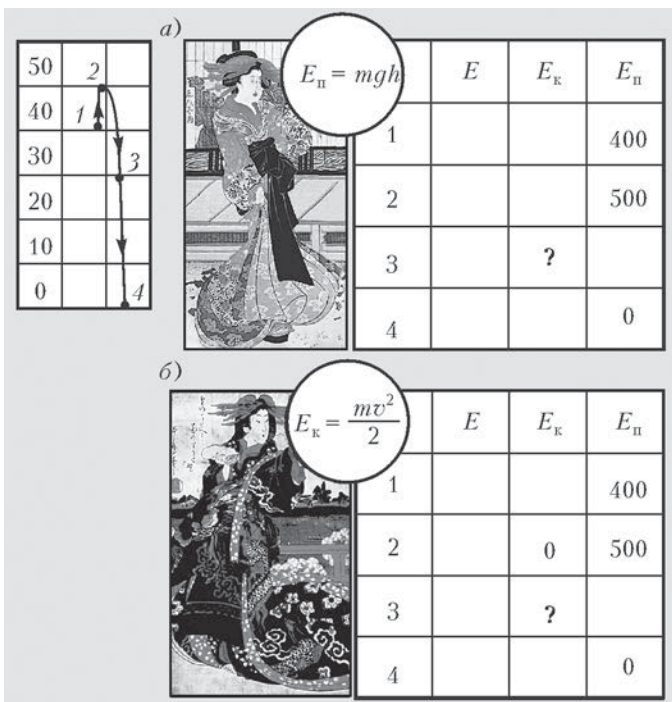



Рис. 4. Результат работы формул для потенциальной и кинетической энергий

А вот формула для кинетической энергии, на первый взгляд, осталась не у дел. Ведь в нашей задаче нет ни одного явно заданного значения скорости, поэтому ни одного значения кинетической энергии мы с ее помощью вычислить не можем. Кроме ...? Кроме нуля! Мы можем поставить ноль в клетку кинетической энергии для той точки траектории, в которой скорость обращается в ноль. Это точка поворота – точка 2 (рис.4,б). И как мы увидим ниже, нахождение неявно заданных нулей – очень важный элемент решения «Физического судоку».

Формулы для кинетической и потенциальной энергий сыграли свою роль. Они могут отдохнуть. С этого момента и до самого конца блистать на сцене будут два других исполнителя. Кто они?

– Во-первых, это определение полной механической энергии. Оно мгновенно перекидывает мостик от двух заполненных клеток во второй строке к первому столбцу (рис.5,а).

а)		$E = E_k + E_{\pi}$			E	E_k	E_{π}
		1					400
		2	500	0		500	
		3		?			
		4					0


б)		$E = \text{const}$			E	E_k	E_{π}
		1	500	100		400	
		2	500	0		500	
		3	500	?			
		4	500	500		0	

Рис. 5. Определение и закон сохранения полной механической энергии

Во-вторых, это закон сохранения полной механической энергии. Теперь во всех строчках первого столбца появляется одно и то же число «500» (рис.5,6).

И, наконец, нам надо сделать последний шаг – заполнить две последние клетки в третьей строке. Что в них надо поставить, если по условию задачи для этой строчки кинетическая энергия равна потенциальной? Конечно же, 250 и 250. Таблица окончательно заполнена и предстает перед нами во всем своем великолепии (рис.6).

Предлагаем вам для самостоятельного решения несколько упражнений.

Упражнения

1. Используя заполненную таблицу (см. рис. 6), найдите, чему равны начальная кинетическая энергия, максимальная кинетическая энергия, максимальная и минимальная потенциальные энергии. А чему будет равна кинетическая энергия в тот момент, когда она будет в три раза больше потенциальной?

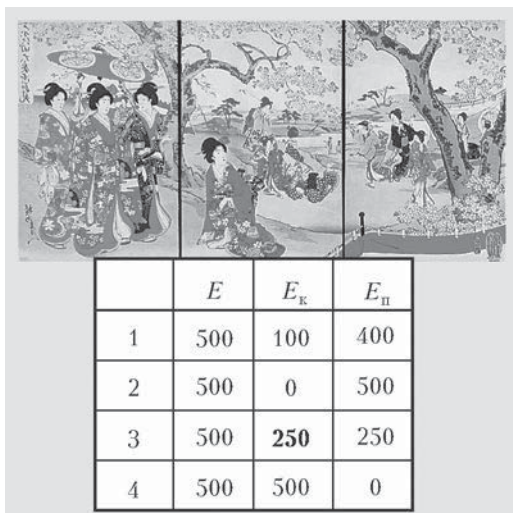


Рис. 6. Банзай!

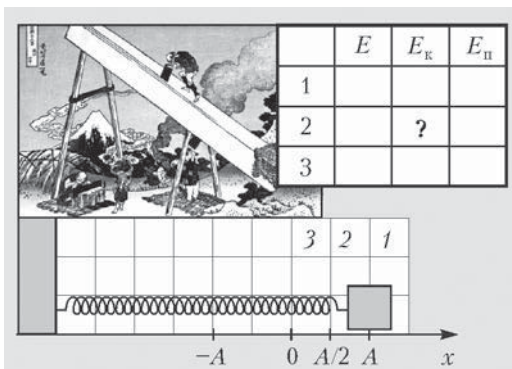


Рис. 7. Гармонические колебания тела на пружине

2. Тело, закрепленное на пружине жесткостью $k = 200 \text{ Н/м}$, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 2 \text{ м}$ (рис.7). Заполните таблицу «Физического sudoku» и скажите, чему равна кинетическая энергия тела в тот момент, когда оно находится в точке с координатой $x = A/2$, чему равно максимальное значение кинетической энергии, чему равно максимальное значение потенциальной энергии пружины.

Указание. Энергия деформированной пружины рассчитывается по формуле $E_{\pi} = kx^2/2$.

Теперь – примеры из термодинамики.

Задача 2. При адиабатном расширении (рис.8,а) внутренняя энергия идеального одноатомного газа уменьшилась на 500 Дж. Какую работу совершил газ в этом процессе?

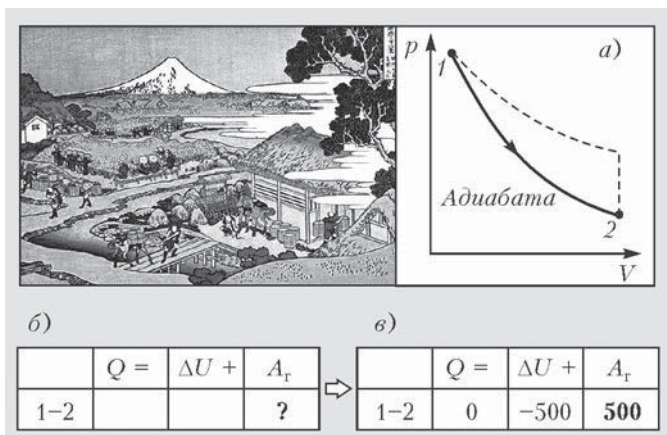


Рис. 8. Самая простая задача

Обсуждение. Термодинамика идеального одноатомного газа оперирует тремя величинами: внутренней энергией газа

$$U = \frac{3}{2} m RT, \text{ работой газа } A_r = p \Delta V \text{ и количеством теплоты } Q,$$

полученным газом. Именно три эти величины мы и поместили в заголовок таблицы «Физическое судоку» (рис.8,б). А заодно и записали первый закон термодинамики: $Q = \Delta U + A_r$, который связывает эти три величины. Клетку, в которой должно появиться искомое число, мы отметили знаком вопроса. Осталось заполнить две пустые клетки. Нам надо догадаться, что следует сделать с одним явно заданным числом – 500 Дж – и найти один ноль, заданный неявно.

Решение. Конечно, слова «внутренняя энергия уменьшилась на 500 Дж» означают, что в среднюю клетку мы должны поставить число 500. А слова «при адиабатном расширении» означают, что ... тепла газ не получал (по определению, адиабатный процесс – это процесс, идущий без теплообмена с окружающей средой). Значит, в первую клетку мы должны записать 0.

Когда две клетки заполнены, первый закон термодинамики, который мы «вписали» в заголовок таблицы, сразу дает ответ: $A_r = 500$ Дж.

Задача 3. С идеальным газом проводят процесс 1–2–3, состоящий из адиабаты 1–2 и изохоры 2–3 (рис.9,а). Конечная температура газа (в точке 3) равна начальной температуре

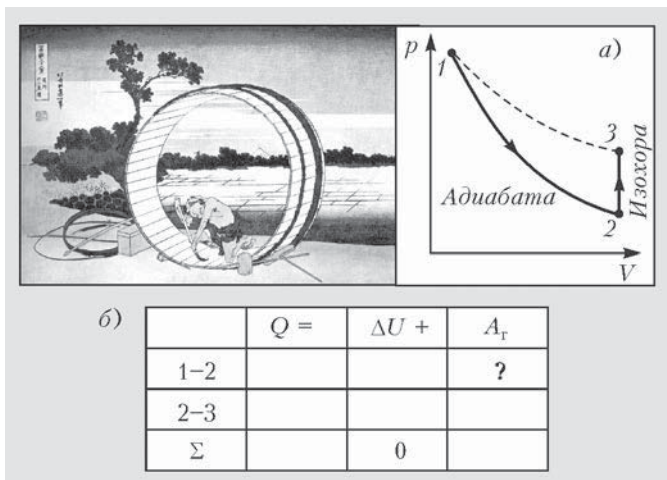


Рис. 9. Такие задачи часто называют задачами с известным ответом, потому что в ответе получается то единственное число, которое было задано в условии

(в точке 1). Какую работу совершил газ при адиабатном расширении, если при изохорном процессе он получил $Q = 200$ Дж тепла?

Обсуждение. Мы думаем, что после решения предыдущей задачи всем стало понятно, как надо действовать здесь, чтобы заполнить таблицу. Поэтому оставляем эту задачу вам для самостоятельного решения. А наша помощь будет заключаться в том, что мы добавим к таблице самую нижнюю, очень полезную строчку для суммарных значений Q , ΔU и A_T (рис.9,б). Сделаем это мы потому, что в условиях некоторых задач задаются значения именно суммарных величин. Так, в нашем случае слова «конечная температура газа равна начальной температуре» означают, что ... (Ответ: $A_T = 200$ Дж.)

Задача 4 (МФТИ, 1989). С идеальным одноатомным газом проводят цикл 1–3–2–1, состоящий из изотермы 1–3, изохоры 3–2 и адиабаты 2–1 (рис.10,а). Какую работу совершил газ в изотермическом процессе, если известно, что в процессе изохорного охлаждения он отдал холодильнику 600 Дж тепла? КПД цикла считать равным $\eta = 0,25$.

Обсуждение. На рисунке 10,б мы приводим почти полностью заполненную таблицу к нашей задаче. Мы сделали одиннадцать шагов. Остается сделать последний шаг – связать неизвестную величину A_1 , которая стоит в трех клетках нашей таблицы, каким-нибудь уравнением. Нам надо сделать «ход конем»!

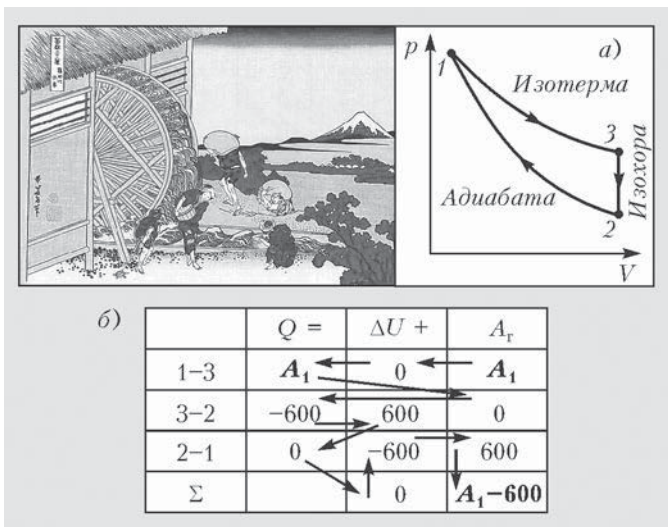


Рис. 10. Для решающего шага нужен ход конем

Решение. В задачах такого типа коэффициент полезного действия $\eta = A_{\Gamma}/Q_{\text{пол}}$ может связывать клетки таблицы самым причудливым образом. В нашем случае он связывает клетку 12 (полная работа газа) с клеткой 3 (полученное количество теплоты). Записав это в виде уравнения $\eta = \frac{A_1 - |Q|}{A_1}$, где $|Q| = 600$ Дж, мы получаем окончательный ответ:

$$A_1 = \frac{|Q|}{1 - \eta} = 800 \text{ Дж}.$$

Задача 5 (для самостоятельного решения). С идеальным одноатомным газом проводят цикл 1-2-3-1, состоящий из адиабатического расширения 1-2, изотермического сжатия 2-3 и изобарного нагрева 3-1. Какую работу A_x ($A_x > 0$) совершили внешние силы над газом при изотермическом сжатии, если известно, что работа газа при изобарном нагреве равна $A_1 = 600$ Дж? КПД цикла считать равным $\eta = 0,2$.

Указание. Изменение внутренней энергии одноатомного газа при изобарном нагреве $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$ в полтора раза больше совершенной газом работы (докажите!).

Задачу, о которой пойдет речь дальше, мы шутя называем самой популярной задачей, поскольку встречали ее и на открытом уроке в седьмом классе, и на устном вступительном экзамене на физический факультет университета. И везде она вызывала самый живой интерес.

Задача 6. Санки массой $m = 5$ кг съехали с горки высотой $h = 5$ м и, проехав некоторое расстояние по горизонтали, остановились. Какую работу необходимо совершить, чтобы затолкать их в горку на прежнее место (по тому же пути)?

Скажем сразу, что ответ $A = mgh$ – неправильный!

Обсуждение. Искать в этой задаче работу по определению, как $A = Fs \cos \phi$, тупиковый путь. Здесь могут помочь только энергетические рассуждения. И эти рассуждения должны носить самый общий характер. Дело в том, что помимо санок в нашей задаче активное участие принимают человек и трение. Смысл их деятельности заключается в изменении полной механической энергии системы. Поэтому привычный для нас закон сохранения энергии здесь не имеет места. В таких задачах нашим инструментом должно быть более общее уравнение – уравнение баланса механической энергии:

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}} = \Delta E.$$

Здесь $A_{\text{внеш}}$ – работа «внешней» силы, т.е. силы, которую прикладывает человек или механизм, $A_{\text{тр}}$ – работа силы трения.

Записанное уравнение можно строго доказать. А физически оно утверждает очень простой факт: полная механическая энергия может измениться в результате нашей деятельности (мы можем что-то поднять, разогнать...) и деятельности силы трения (она обычно превращает часть механической энергии в тепло).

Упражнение 3. Получите уравнение баланса механической энергии из теоремы об изменении кинетической энергии

$$\Delta E_{\text{к}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}} + A_{\text{пот}}.$$

Указание. Работа потенциальных сил может быть выражена через изменение потенциальной энергии: $A_{\text{пот}} = -\Delta E_{\text{п}}$.

Посмотрим, как сработает это уравнение в данном случае.

Решение. В нашей задаче присутствуют три энергетические величины и два процесса. Три энергетические величины это:

выполненная нами работа $A_{\text{внеш}}$, работа силы трения $A_{\text{тр}}$ и изменение полной механической энергии санок ΔE . Процессы: санки съезжают вниз (процесс 1–2), мы затаскиваем санки вверх (процесс 2–1). Поэтому таблица «Физического sudoku» имеет вид, показанный на рисунке 11.

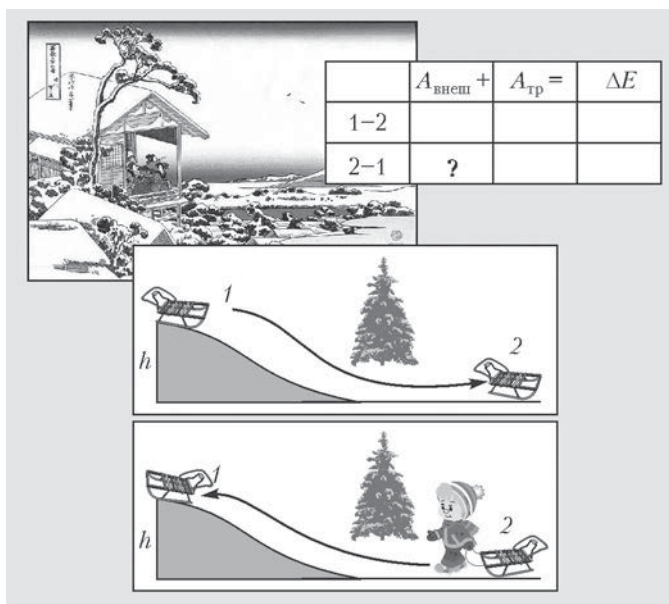


Рис. 11. «Это первый снег – как раз довольно, чтобы нагнуть травы шпажной листы» (Мацуо Басё, XVII век)

Читаем условие задачи и разгадываем заданные неявно значения. «Санки съезжают вниз и останавливаются»: $A_{\text{внеш}} = 0$ и $\Delta E = -mgh$ (почему?). «Мы затаскиваем санки вверх»: $\Delta E = mgh$ (почему?). Наша таблица становится более определенной (рис. 12, а). Осталось перепрыгнуть с первой строчки на вторую. Догадались, как?

Работа силы трения и при скатывании санок и при их затаскивании вверх одинакова – ведь мы затаскиваем санки на горку по той же самой траектории! Поэтому в среднем ряду в обеих строчках (рис. 12, б) стоит одна и та же величина $(-mgh)$. Дальнейшее очевидно:

$$A_{\text{внеш}} = 2mgh = 500 \text{ Дж}.$$

Этот ответ обычно читают так: «При закатывании санок нам


	а)	$A_{\text{внеш}} +$	$A_{\text{тр}} =$	ΔE
	1-2	0	$-mgh$	$-mgh$
	2-1	?		mgh
	б)	$A_{\text{внеш}} +$	$A_{\text{тр}} =$	ΔE
	1-2	0	$-mgh$	$-mgh$
	2-1	$2mgh$	$-mgh$	mgh

Рис. 12. Любишь кататься, люби и саночки возить!

нужно не только поднять санки на высоту h , но еще и поработать против силы трения. Причем, в силу первого условия, эта работа в точности равна mgh .

Упражнение 4. Чтобы наше решение было полностью корректно, в условии предыдущей задачи надо потребовать не только чтобы санки затаскивали вверх по той же самой траектории, но и чтобы в каждой точке траектории они имели ту же самую скорость, что и при спуске. Объясните необходимость этого требования.

К сожалению, езда на санках не всегда заканчивается «мягкой» остановкой. Предлагаем вам рассмотреть более жесткий режим спуска и убедиться еще раз, что «Физическое sudoku» готово помочь нам в самой сложной ситуации.

Задача 7 (для самостоятельного решения). Санки массой $m = 5$ кг съезжают без начальной скорости с горки высотой $h = 5$ м. На горизонтальном участке они на скорости $v = 4$ м/с врезаются в дерево и останавливаются. Какую работу необходимо совершить, чтобы затаскать санки от дерева обратно на горку?

БЕЗРАБОТНЫЕ СИЛЫ

А.Стасенко

Да неужто есть такие силы? Казалось бы, если есть сила и есть перемещение тела, на которое действует эта сила, то должна быть совершена работа. Ан нет! Тут нужно учесть одну важную вещь – косинус угла α между вектором силы \vec{F} и направлением перемещения $\Delta\vec{x}$ (рис.1). Так что работу совершает не вся сила, а только ее проекция на направление перемещения:

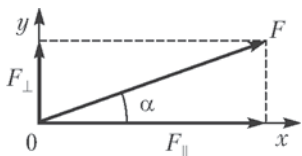


Рис. 1. Работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения

$$\Delta A = F \Delta x \cos \alpha = F_{\parallel} \Delta x.$$

Значит, другая компонента силы, а именно $F_{\perp} = F \sin \alpha$, работы не совершает.

А встречаются ли в физике силы, которые имеют только одну компоненту – перпендикулярную направлению перемещения? Да, и не одна! Но прежде всего нужно хорошенько подготовиться к их обсуждению, в частности запомнить некоторые правила.

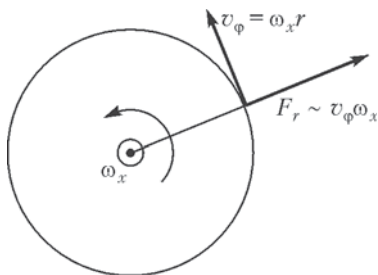


Рис. 2. Центробежная сила F_r перпендикулярна окружной (линейной) скорости v_{ϕ} и вектору угловой скорости ω_x

Поскольку речь пойдет о взаимно перпендикулярных векторах, будем внимательно следить за индексами, указывающими направления этих векторов. Ибо будет использоваться как прямоугольная (декартова) система координат x, y, z , так и цилиндрическая система x, r, ϕ . Далее, если вектор перпендикулярен плоскости страницы, обозначим его точкой, когда он направлен к нам, и крестиком – когда от нас («острие» и

«хвост» стрелки). А теперь приступим к рассмотрению безработных сил.

Центробежная сила (рис.2). Тут все ясно: если тело движется по окружности, а сила направлена по радиусу, перпендикулярному элементу окружности, — значит, центробежная сила работы не совершает. И это очень хорошо. Благодаря этому факту Земля миллиарды лет вращается в целости и сохранности вокруг Солнца. Эта сила хорошо знакома всем с детства: карусель, повороты экипажей вправо и влево... А с научной целью центробежная сила была впервые использована ученым Ф.Ру при анализе икры лягушек в центробежном сепараторе.

Сила Магнуса (рис.3). Эту силу «открыл» Генрих Густав Магнус (1802–1870). Ее используют, например, футболисты, когда хотят послать мяч в ворота «из-за угла» — так называемый «сухой лист». Для этого нужно ударить мяч левее его центра так, чтобы вектор угловой скорости был

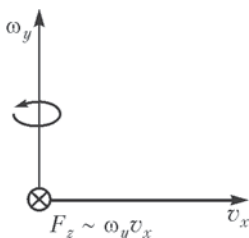


Рис. 3. Сила Магнуса F_z перпендикулярна векторам линейной скорости шара v_x и угловой скорости его вращения ω_y

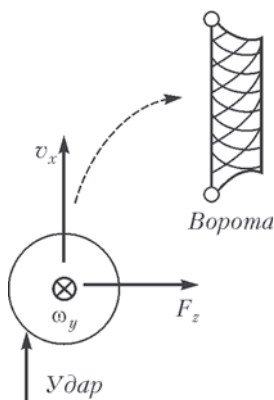


Рис. 4. «Сухой лист» в футболе (вид сверху)

направлен вниз (рис.4; вид сверху), т.е. ударить в точку на полусфере, внешней по отношению к бомбардируемым воротам.

Но вращаться может не только шар — цилиндр тоже может. Известна впечатляющая демонстрация эффекта Магнуса: лента, намотанная на цилиндр, в результате искусного рывка

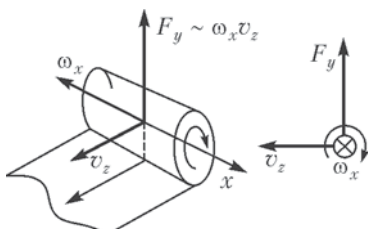


Рис. 5. Векторы v_z , F_y , ω_x образуют правую тройку векторов

позволяет сообщить цилиндру вращательное и поступательное движения относительно воздуха (рис.5). Напомним, что, согласно правилам, принятым в механике, вектор угловой скорости должен быть ориентирован так, что с его вершины вращение казалось происходящим против часовой стрелки.

Интересно движение спутных вихрей за крылом самолета (рис.6). Как показал Николай Егорович Жуковский (1847–1921), отец русской авиации, эти вихри неразрывно связаны с

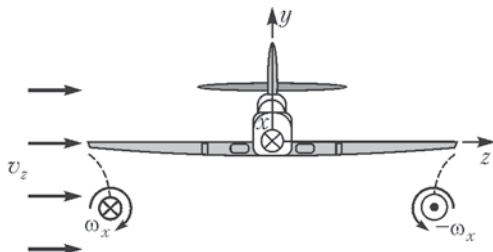


Рис. 6. Спутные вихри за крылом самолета; x, y, z – декартова система координат. Ветер дует слева со скоростью v_z , что равносильно движению вихрей относительно воздуха со скоростью $-v_z$

подъемной силой крыла. Согласно закону сохранения момента импульса самолета и всей атмосферы, воздух в этих вихрях должен вращаться в противоположных направлениях. На рисунке 6 вектор угловой скорости одного вихря направлен вдоль оси x (крестик), а другого – против оси x (точка). Пусть слева дует ветер со скоростью v_z . Ясно, что силы Магнуса, действующие на массы воздуха, вращающиеся в противоположных направлениях, будут направлены противоположно друг другу и будут перпендикулярны векторам линейной и угловой скоростей.

Опираясь на рисунок 6, наш Читатель легко определит, в каком направлении будет вращаться пара вихрей (по или против часовой стрелки). Надо только помнить, что относительно воздуха вихри движутся влево, в направлении $-v_z$.

Сила Лоренца. Эту силу впервые записал Хендрик Антон Лоренц (1853–1928), голландский ученый. Она действует на заряженную частицу (заряд q), движущуюся со скоростью v_ϕ в магнитном поле B_x (рис.7), и равна

$$F_L = qv_\phi B_x.$$

Здесь имеется в виду цилиндрическая система координат x, r, ϕ . Благодаря этой силе, электрически заряженная частица, попав-

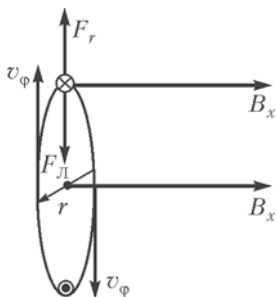


Рис. 7. Положительно заряженная частица в однородном магнитном поле B_x вечно движется по окружности по часовой стрелке, если смотреть с «острия» вектора \vec{B} . Сила Лоренца F_L уравнивается центробежной силой F_r . Обе силы — «безработные»

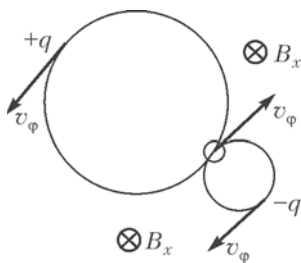


Рис. 8. Пара заряженных частиц, родившаяся в результате распада материнской частицы, движущейся в начальный момент со скоростью v_ϕ . Тяжелая положительная частица движется с той же скоростью v_ϕ против часовой стрелки, легкая отрицательная — по часовой стрелке

шая в область однородного магнитного поля B_x со скоростью v_ϕ , вектор которой перпендикулярен B_x , будет всегда двигаться по окружности, радиус которой r теперь легко найти, приравняв силу Лоренца центробежной силе:

$$qv_\phi B_x = m \frac{v_\phi^2}{r},$$

где m — масса частицы. Отсюда видно, что радиус окружности (траектории частицы) тем больше, чем больше ее масса (рис.8).

Однако скольких усилий и вычислительной работы потребовало рассмотрение *безработных* сил!

КАК СТУДЕНТ КАПЕЛЬНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ ИЗОБРЕЛ

А.Стасенко

Аристотель с глубоким почтением относился к мышлению..., он показывает нам, как трудно и постепенно мысль вызревает из исходного глубокого ощущения. И сам факт, что человеческое существо может прийти к истинной мысли, может постичь научную и даже метафизическую истину, вызывает в нем безграничный восторг и даже удивление.

А.Койре. Очерки истории философской мысли

Как-то на лекции узнал Студент, что коэффициент полезного действия любой тепловой машины ограничен сверху значением

$$\eta = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

где T_{\max} и T_{\min} , вполне понятно, являются температурами нагревателя и холодильника. Это фундаментальное утверждение еще во времена Пушкина сформулировал французский физик Сади Карно (1824 г.). Отсюда следует, что для увеличения КПД нужно как можно выше поднимать температуру нагревателя и как можно ниже опускать температуру холодильника, но все-таки не удастся полностью превратить тепло в механическую работу.

И тут в голове Студента сверкнула первая мысль: а космос!? Он читал у фантастов, что в космосе существует страшный космический холод, т.е. $T_{\min} \rightarrow 0$. А значит, $\eta \rightarrow 1$!? Но тут пришла вторая мысль: увы, в вакууме нет ни теплопроводности, ни конвекции, а единственный способ теплоотвода – излучение. При этом плотность потока излучения q тем больше, чем выше температура T излучающего тела:

$$q = \sigma T^4.$$

Эта сильно нелинейная температурная зависимость называется законом Стефана–Больцмана, а коэффициент σ – постоянной

Стефана–Больцмана. Выходит, что для эффективного отвода тепла от тепловой машины температуру холодного конца ее цикла нужно повышать!?

Заметим, что постоянная Стефана–Больцмана σ является размерной комбинацией фундаментальных физических констант, непосредственно относящихся к делу (т.е. к описанию теплового излучения): постоянной Больцмана $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К (конечно, в комплексе $(kT)^4$), постоянной Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с (поскольку излучение квантовано) и скорости света в вакууме $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с (ведь это излучение!). Так что

$$\sigma = \frac{1,62 \cdot k^4}{\pi^2 (h/(2\pi))^3 c_0^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4)$$

(как легко запомнить – последовательность 5, 6, 7, 8).

Из формулы Карно видно, что лучше всего взять бы $T_{\max} \rightarrow \infty$ или $T_{\min} \rightarrow 0$. Но ведь T_{\max} ограничена сверху, скажем температурой плавления источника энергии или допустимым значением давления насыщенных паров рабочего тела, а T_{\min} ограничена снизу температурой окружающей среды, куда нужно выбросить отработанное тепло. Например, в случае паровоза (который исправно служит человечеству почти два столетия) эта борьба инженеров за повышение КПД позволила достичь его значения 10–12%. Но в космосе нет никакой «температуры окружающей среды» и единственным способом отвода «лишнего» тепла является излучение. И тут возникает противоречие – чтобы интенсивно излучать, нужно увеличивать температуру холодного конца термодинамического цикла (согласно закону Стефана–Больцмана), а чтобы повышать КПД, нужно эту температуру уменьшать. А кому нужна тепловая машина с низким КПД!?

И что же получается: если нам для серьезных космических полетов нужна мощность, скажем, $W = 10^{10}$ Вт, то в случае приемлемого значения КПД $\eta = 0,1 = 10\%$ (хотя бы как у паровоза) большую часть энергии придется сбросить в виде излучения? Для этого потребовалась бы площадь излучателя

$$S = \frac{(1 - \eta)W}{\sigma T_{\min}^4}.$$

Если, например, $T_{\max} = 2000$ К, то при $\eta = 0,1$ $T_{\min} = 1800$ К. Тогда

$$S = \frac{0,9 \cdot 10^{10}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (1800)^4} \text{ м}^2 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ м}^2$$

– полтора гектара! Но где взять такую площадь излучения?

И тут Студента осенила третья мысль! Если уж температура нагревателя должна быть такой высокой, то можно выбрать некое вещество с меньшей температурой плавления: $T_{\text{пл}} < T_{\text{max}}$, распылить его на капли, выбросить их в космос и, дав им охладиться почти до температуры отвердевания $T_{\text{отв}}$, затем собрать и снова запустить их в термодинамический цикл. В свободном полете каждая капля радиусом r будет излучать со своей сферической поверхности мощность $\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$, а ее внутренняя энергия cmT будет уменьшаться по закону

$$\frac{d(cmT)}{dt} = -\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

Понятно, что здесь c – удельная теплоемкость материала капли, а $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ – ее масса (ρ – плотность материала жидкой капли). Считая все величины, кроме температуры, не зависящими от времени, запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{d(T/T_{\text{пл}})}{d(t/\tau)} = -\left(\frac{T}{T_{\text{пл}}}\right)^4,$$

где $T_{\text{пл}}$ – введенная выше начальная температура капли, равная температуре плавления, а $\tau = r \frac{\rho c}{3\sigma T_{\text{пл}}^3}$ – характерное время процесса остывания (проверьте размерность). Это простенькое дифференциальное уравнение студенты (и абитуриенты) Физтеха решают в уме:

$$\frac{T}{T_{\text{пл}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3t/\tau}}.$$

Отсюда легко оценить время, за которое капля охладится,

например, вдвое $\left(\frac{T}{T_{\text{пл}}} = \frac{1}{2}\right)$:

$$t_{1/2} = \frac{7}{3}\tau.$$

Сделаем численные оценки для «типичного» (гипотетического, но правдоподобного) металла с плотностью $\rho = 10^4$ кг/м³ и удельной теплоемкостью $c = 500$ Дж/(кг·К). Если его распылить на капли радиусом $r = 10^{-3}$ м = 1 мм, получим

$$t_{1/2} = \frac{7}{3} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^2}{3 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8^3 \cdot 10^9} \text{ с} \approx 10 \text{ с}.$$

Значит, при скорости выброса капель 10 м/с их приемник нужно расположить на расстоянии порядка сотни метров от источника – вполне разумный размер для серьезного межпланетного корабля.

А каковы при этом будут потоки массы Q_m ($[Q_m] = \text{кг/с}$) и число частиц Q_n ($[Q_n] = 1/\text{с}$)? Ясно, что если теплосодержание одной частицы (выбрасываемое в виде излучения) изменяется на $cm(T_{\text{пл}} - T_{\text{пл}}/2)$, то

$$Q_n = \frac{(1 - \eta)W}{cm(T_{\text{пл}}/2)} \sim 5 \cdot 10^8 \text{ 1/с, а } Q_m = mQ_n = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/с} = 20 \text{ т/с!}$$

И тут четвертая мысль пришла к Студенту: ведь любое вещество должно испаряться! При данной температуре T существует давление насыщенных паров $p_{\text{п}}(T)$, которые будут безвозвратно уходить в космическое пространство. Их плотность легко найти из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}}(T)M}{RT}$$

(здесь R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса паров). Средняя тепловая скорость паров равна

$$v_{\text{т}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}}.$$

Значит, масса каждой капли будет убывать со скоростью

$$\frac{dm}{dt} \sim -\rho_{\text{п}}v_{\text{т}} \cdot 4\pi r^2$$

(точный коэффициент в правой части равен $1/4$, но это не меняет сути дела). Конечно, хотелось бы подыскать вещество с наименьшим давлением насыщенных паров – чтобы масса капли в каждом цикле уменьшалась как можно меньше. Но если такой радиатор должен работать месяцы, годы?..

Тут свежие мысли перестали посещать Студента, и он начал рыться в справочниках физических величин, чтобы найти необходимое оптимальное вещество.

СОЛЬ, ОГОНЬ И ВОДА

А.Стасенко

Математика – это вам не физика, где можно химичить.

Однажды на лекции в МФТИ

Вспоминается один известный физик, который в молодости был шалуном:

«Вуд знал, что натрий, мягкий серебристый металл, если его бросить в воду, внезапно загорается со взрывом и горит ослепительным желтым пламенем, извергая снопы искр и облака белого дыма... он положил в карман, в маленькой жестяной коробочке, шарик из натрия, величиной с грецкий орех ...громко закашлялся и, на виду у всех плюнув в лужу, незаметно бросил шарик в том же направлении. Раздался страшный удар, полетели искры, и большое желтое пламя поднялось на поверхности воды. За ними разверзся ад – вопли, молитвы, перевернутые стулья и один голос...: “Спасайся кто может, негры! Этот человек плюнул огнем!.. только сам Старый Сатана умеет это делать!” (из книги В.Сибрука «Роберт Вуд»).

Однако, и мы кое-что умеем. По крайней мере, постараемся понять происходящее.

Натрий $^{23}_{11}\text{Na}$ относится к интересной группе металлов, называемых щелочными. Мы ежедневно употребляем его в пищу – конечно, не в виде металла (ни-ни!), а в соединении с хлором. Это всем известная и вкусная поваренная соль NaCl . В человеческом сознании она почему-то таинственно связана с огнем; в некоторых языках слово «соль» и «солнце» звучат одинаково. В Писании хорошие люди называются «солью земли» и есть удивительное словосочетание – «осолиться огнем».

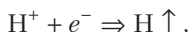
Чем же интересны щелочные металлы? А тем, что их внешний электрон, называемый валентным, очень слабо связан с остальной структурой атома, так что атом натрия можно назвать водородоподобным – у атома водорода один протон и один электрон.

Но ведь молекула воды тоже состоит из протона H^+ и гидроксила OH^- (поэтому порой трудно решить – щелочь она или кислота). Значит, все, что происходит при соприкосновении натрия с водой, можно представить в виде такого процесса:



Тут слева представлены нейтральный атом натрия, содержащий электрон e^- , слабо связанный с положительным ионом Na^+ , и диссоциированная молекула воды – положительно заряженное ядро атома водорода (протон) H^+ и гидроксил OH^- . Заметим, что свободных протонов в жидкой воде нет – они «прилипают» к нейтральной молекуле, образуя ион гидрония: $\text{H}_3\text{O}^+ \equiv \text{H}^+ + \text{H}_2\text{O}$, так что можно в обеих частях приведенной выше реакции написать по одной нейтральной молекуле воды. Но это для нас несущественно, а существенно то, что протон тоже слабо связан с молекулой воды и его можно считать почти свободным.

Да уж не химия ли это? – спросит вдумчивый читатель. – А что же такое химия, как не физический процесс обмена веществ электронными оболочками! (Не случайно существуют такие интересные науки, как физическая химия и химическая физика.) Вот справа и изображен результат перестройки электронных оболочек: «почти свободный» электрон атома натрия объединяется с «почти свободным» протоном гидрония, образуя нейтральный атом водорода ${}^1_1\text{H}$ (горючий газ!):



а в воде остается диссоциированная щелочь NaOH .

Что же происходит с шариком натрия на поверхности воды? Плотность натрия $0,97 \text{ г/см}^3$ меньше плотности воды 1 г/см^3 , и уже поэтому шарик не тонет, а тут еще взрывное тепловыделение при соприкосновении с поверхностью, которое заставляет шарик натрия хаотически метаться, удовлетворяя жажду его атома отдать свой валентный электрон протону воды. Если перейти к энергетическому описанию, то можно сказать, что все эти атомы, ионы, радикалы и электроны сваливаются в потенциальную яму, а разность начального и конечного уровней энергии выделяется в виде кинетической энергии теплового движения конечных продуктов реакции. И вот – освобожденная теплота реакции Q разогревает образовавшийся газ (водород), который вспыхивает в кислородосодержащей атмосфере, выделяя дополнительную теплоту сгорания.

Можно сделать численные оценки энергетических характери-

стик некоторых процессов – например, оценить, какая энергия выделится при захвате электрона протоном, в результате чего образуется нейтральный атом водорода. Конечно, она в точности равна энергии, которую нужно затратить, чтобы «вытащить» электрон с самого нижнего уровня атома водорода «на бесконечность» – эту энергию называют энергией ионизации. Используем старую теорию Бора, согласно которой электрон движется по круговой «орбите» радиусом r со скоростью v . Тогда сумма кинетической и потенциальной энергий электрона равна

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где m – масса электрона, e_0 – его заряд, ϵ_0 – электрическая постоянная. «Скорость электрона» определяется из второго закона Ньютона:

$$ma = F, \text{ или } \frac{mv^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения, считая, что «на бесконечности» электрон покоится, т.е. и кинетическая, и потенциальная энергии равны нулю, получим искомую энергию ионизации (разность конечной и начальной энергий). Однако почему слова «орбита», «скорость электрона» взяты в кавычки? А дело в том, что современная квантовая механика описывает состояние электрона в атоме в других терминах. Но для наших оценок это несущественно.

Итак,

$$\begin{aligned} E_i = 0 - \left(-\frac{e_0^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r} \right) &= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}} \text{ Дж} = \\ &= 23 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ} \end{aligned}$$

– знаменитая энергия ионизации атома водорода. Здесь использовано значение классического боровского радиуса $r = 0,5 \text{ \AA} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Если отнести полученную энергию к массе атома водорода $m_{\text{H}} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, то получим удельную теплоту рекомбинации – приблизительно 1400 МДж/кг. По сравнению с нею удельная теплота испарения воды (самый энергоемкий кухонный процесс) порядка 2,5 МДж/кг представляется малой величиной.

Тут следует сделать замечание. Может быть, не все знают, чему равен этот боровский радиус. Желаящие найти его могут воспользоваться условием квантования Бора: на длине устойчи-

вой круговой орбиты радиусом r_n должно укладываться целое число длин волн де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. Иными словами,

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Есть наглядная аналогия в макром мире: когда проверяют целостность фарфоровой чашки, по ней слегка ударяют палочкой. Хорошая чашка издает долгоживущий мелодичный звук (как сказал бы китаец, звук «као»), а треснувшая чашка отзывается коротким тупым стуком (нарушено условие периодичности Бора!). Теперь у нас достаточно уравнений, чтобы определить все, что нужно, положив $n = 1$ («первый тон»).

В заключение вспомним событие, имевшее место почти три тысячи лет тому назад и очень напоминающее шутку Роберта Вуда:

«И взял Илья двенадцать камней... И построил из сих камней жертвенник. И положил дрова... И сказал: наполните четыре ведра воды, и выливайте на всесжигаемую жертву и на дрова... И вода полилась вокруг жертвенника... подошел Илья пророк и сказал... Услышь меня, Господи!... И ниспал огонь Господа и пожрал всесожжение, и дрова, и камни, и прах, и поглотил воду...» (3-я книга Царств).

«ПОТЕНЦИЯ» И «ЖИВАЯ СИЛА»

А.Стасенко

Но глуповцы тоже были себе на уме. Энергии действия они с большой находчивостью противопоставляли энергию бездействия.

М.Е.Салтыков-Щедрин. История одного города

Да разве есть такая энергия – энергия бездействия? А вот и есть! Она называется потенциальной энергией (от англ. potential – возможный). Сжатая пружина, высокогорный снежный пласт, пластины заряженного конденсатора, социальное расслоение ... – вот примеры источников потенциальной энергии, которая может перейти в кинетическую, или, как говорили в средние века, в «живую силу». Так, пружина толкает груз, снежная лавина сметает все на своем пути, разряжающийся конденсатор нагревает электрическое сопротивление, русский бунт – «бессмысленный и беспощадный», как его называет А.С.Пушкин в повести «Капитанская дочка», – уравнивает в бедности оставшихся в живых.

Физике, которая стремится к фундаментальной простоте, сильно повезло: важнейшие законы взаимодействия тел и зарядов описываются удивительно простыми зависимостями силы и энергии от расстояния r между этими (точечными) телами и зарядами.

Вспомним закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона: сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния, а потенциал, т.е. потенциальная энергия в расчете на единицу массы или заряда, обратно пропорционален первой степени расстояния:

$$F \sim \pm \frac{1}{r^2}, \quad \varphi \sim \pm \frac{1}{r}.$$

Здесь знак «плюс» говорит об отталкивании одноименных зарядов, а знак «минус» – о притяжении разноименных. Это – в случае электростатики. Гравитирующие же тела всегда притяги-

ваются, и для них в приведенных соотношениях справедлив только знак «минус».

А вот для растянутой (или сжатой) пружины сила пропорциональна первой степени деформации r и обязательно со знаком «минус» – ведь это возвращающая (!) сила, а потенциал пропорционален квадрату этой деформации:

$$F \sim -r^1, \quad \phi \sim r^2.$$

Эти простейшие потенциалы (повторим – потенциальные энергии в расчете на единицу массы или заряда) изображены на рисунке 1. Рассматривая этот рисунок, можно понять, откуда у физиков возник образ «потенциальной ямы». Приведенные кривые (сплошные линии) похожи на сечение стенок сосуда, по которым «шарик» – точечная масса или заряд противоположного знака – стремится соскользнуть на дно. Аналогично, случай расталкивания одноименных зарядов соответствует соскальзыванию с «горки» (пунктирные линии). Обратим внимание на то, что координата r слева от нуля вовсе не отрицательна – на рисунке показано сечение тела вращения, имеющего ось ϕ .

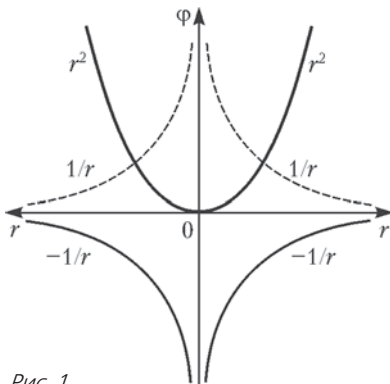


Рис. 1

Можно наглядно реализовать «потенциальную яму» при помощи мокрого куска мыла, поместив его первоначально у верхнего края ванны и отпустив. Если бы не потери энергии на трение и сопротивление воздуха, колебания куска мыла продолжались бы вечно.

Но есть и более сложные зависимости – например, потенциальная энергия (потенциал ϕ) взаимодействия пары молекул (рис.2). Понятно, что значение расстояния r_m между центрами этих молекул,

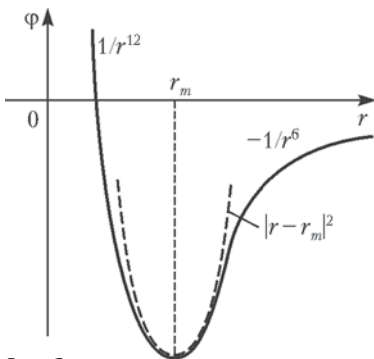


Рис. 2

соответствующее минимуму потенциальной энергии, описывает конденсат. При больших расстояниях ($r > r_m$) происходит взаимное притяжение молекул газа, здесь $\Phi \sim -\frac{1}{r^6}$. При меньших расстояниях ($r < r_m$), когда газ становится жидкостью или твердым телом, попытка сблизить эти молекулы приводит к резкому противодействию: им снова предлагают вернуться в потенциальную яму. Чтобы подчеркнуть очень резкую зависимость от r на этой ветви кривой, предложено взять $\Phi \sim \frac{1}{r^{12}}$. В целом эта кривая зависимости Φ от r представляет так называемый потенциал Леннарда-Джонса.

А что это за пунктирная кривая на рисунке 2? Это – парабола, напоминающая потенциальную энергию пружины (см. рис.1). Дело в том, что физикам очень нравятся простые колебания – гармонические, происходящие внутри параболической ямы. А отклонение реальной потенциальной ямы от параболической физики называли мерой ангармоничности. Но любые колебания – это переход одной энергии (например, потенциальной) в другую (кинетическую) при сохранении их суммы. Это и есть закон сохранения механической энергии (если пренебречь ее потерями).

И опять вспоминается А.С. Пушкин (поэма «Руслан и Людмила»):

...И в той долине два ключа:
Один течет волной *живою*,
По камням весело журча,
Тот льется *мертвою* водою...

Точнее было бы сказать, что второй («тот») ключ напоминает водохранилище, питающее электростанцию. Однако, оба ключа помогли храброму Руслану – конечно, не без помощи колдуна. Похоже, тот был физиком...

ВИХРИ ВРАЖДЕБНЫЕ...

А.Стасенко

И какой же русский не знает этих строк:

«Буря мглою небо кроет,
Вихри снежные крутя....»,

«Лишь вихорь черный
На древо смерти набежит...»
(А.С. Пушкин),

«Вихри враждебные веют над нами»
(революционная «Варшавянка»).

Уверен, что наш читатель может напомнить множество других примеров. Но еще в древности интересовались этой формой движения – причем не бесстрастно. Например, ветхозаветный Иезекииль, описывая аппарат вертикального взлета и посадки, привидевшийся ему в Храме, был потрясен «колесами», которые не отстают от аппарата: «эти колеса похожи были в своем движении на... вихрь особого рода».

А вот как описывает атмосферный вихрь римский поэт и философ Тит Лукреций Кар в поэме «О природе вещей» (1 век до н.э.):

«...легко ты теперь разберешься
В том, что у нас называется смерчем ...
Падает на море столб ...
Тут все суда, что таким захвачены водоворотом,
Вертятся бешено в нем, подвергаясь огромному риску ...»

Очень интересна также книга П.-А.Моллена «Охотники за тайфунами», в которой описаны атмосферные вихри тысячекилометровых масштабов, приводящие к катастрофическим разрушениям.

Что же общего у всех этих явлений, которые можно отнести к понятию «вихрь»?

Прежде всего, это наличие оси x , вокруг которой происходит движение среды, причем вектор скорости имеет окружную

(азимутальную) компоненту v_ϕ , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. А если есть и осевая компонента скорости v_x , то движение частиц, очевидно, будет спиральным. Далее, эта

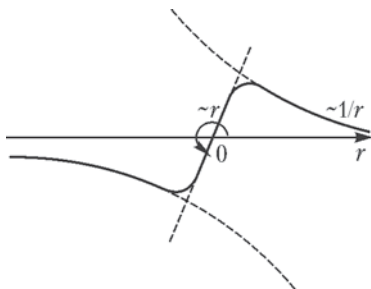


Рис. 1

окружная компонента скорости убывает с расстоянием r от оси, стремясь к нулю на бесконечности (рис.1). И можно сказать еще точнее: она убывает обратно пропорционально этому расстоянию: $v_\phi \sim 1/r$. Почему? Потому что вихрь характеризуется специальной величиной – *циркуляцией*. А она как раз и равна произведению окружной компоненты

скорости среды на длину окружности $2\pi r$:

$$\Gamma = 2\pi r v_\phi. \quad (1)$$

Как же тут не вспомнить закон Био–Савара: индукция магнитного поля, порожденного бесконечно длинным прямым проводом с постоянным током I , убывает обратно пропорционально расстоянию r от этого тока:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ или } I = 2\pi r \mu_0 B.$$

Выходит, можно сказать, что ток есть циркуляция магнитного поля!

Дальше – больше. Представим себе, что магнитное поле с индукцией B_x , направленное вдоль оси x , изменяется со временем с постоянной скоростью. Что говорит закон Фарадея? А то, что вокруг оси x возникает циркуляционное электрическое поле E_ϕ такое, что $2\pi r E_\phi$ пропорционально скорости изменения B_x со временем и площади πr^2 . Но в этом случае, сократив на r обе части этого соотношения, получим

$$E_\phi \sim r. \quad (2)$$

(Заметим, что мы упорно сохраняем индекс ϕ , подчеркивая, что рассматривается одна из компонент вектора \vec{r} цилиндрической системы координат.)

Именно введение понятий *циркуляции* и *потока* позволило Джеймсу Клерку Максвеллу завершить формулировку уравнений электромагнетизма. Как считает, например, Роберт Милликен, Максвелл «облек плебейски обнаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики».

Однако вернемся к нашим вихрям. Удивительно, но обе зависимости (1) и (2) характеризуют еще один интересный тип вихрей, который стал широко распространенным сотню лет назад. А именно, «отцом русской авиации» Николаем Егоровичем Жуковским было показано, что подъемная сила F_y крыла самолета с размахом l связана с циркуляцией скорости воздуха вокруг него:

$$F_y = \Gamma \rho v_\phi l$$

(здесь ρ – плотность воздуха). То, что за крылом должны возникать два вихря с противоположными значениями циркуляции (т.е. противоположными направлениями вращения воздуха), очевидно. Ведь подъемная сила создается за счет того, что крыло отбрасывает воздух вниз, создавая поток импульса, равный весу летательного аппарата. А на место этого отброшенного вниз воздуха поступают сверху новые порции.

Но как устроены эти концевые вихри? Если принять зависимость (1), то с приближением к оси ($r \rightarrow 0$) получим $v_\phi \rightarrow \infty$, что явно нелепо. Это недоразумение разрешается, если мы вспомним о таком понятии, как вязкость воздуха. Ведь с уменьшением r разность скоростей двух соседних цилиндрических слоев воздуха возрастает (а в соотношении (1) мы ее никак не учитывали). Значит, возникнут силы, тормозящие вращение воздуха с приближением к оси. И, что вполне естественно, на оси скорость v_ϕ будет равна нулю. Из законов гидродинамики следует, что v_ϕ будет прямо пропорциональна радиусу, как и в соотношении (2).

На рисунке 1 качественно изображена эта зависимость окружной скорости воздуха в единичном спутном вихре самолета, а на рисунке 2 представлена суммарная скорость двух спутных вихрей в поперечном сечении на некотором расстоянии за самолетом.

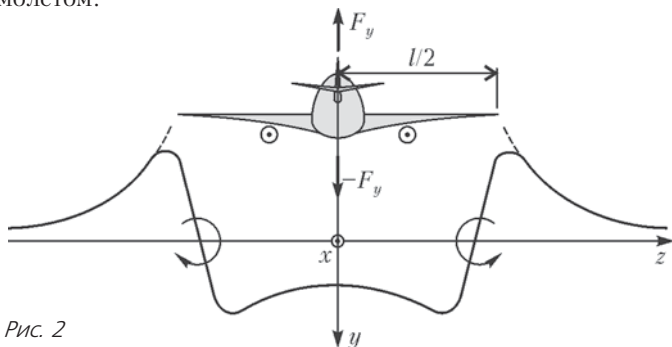


Рис. 2

Действительно, любопытный вихрь – внутри из-за вязкости воздуха он вращается как твердое тело и похож на результат (2), следующий из закона Фарадея, а с удалением становится так называемым *потенциальным* (безвязкостным) вихрем и напоминает результат (1). Причем эти вихри, необходимые для поддержания крылатого аппарата в воздухе, в окрестности аэродрома становятся действительно враждебными: кружась над взлетно-посадочной полосой некоторое время, они создают угрозу другим (особенно малоразмерным) самолетам.

В заключение советуем проделать следующее: помешав в чашке черный кофе (например, по часовой стрелке), добавьте туда каплю молока. И если вы увидите в образовавшейся картине аналог спиральной галактики, или торнадо, или тайфуна, вы можете смело поступать на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (государственного университета), где вам сообщат о вихрях все остальное.

ПРЕКРАСНЫЕ МОМЕНТЫ ФИЗИКИ

А.Стасенко

... и вдруг в этот самый момент...

Из страшных рассказов

Термин «момент», о котором пойдет речь, используется в самых разных смыслах. Для поэтов и писателей он ассоциируется со словом «мгновение», ораторы любят «заострить внимание на этом моменте», на TV существует «Момент истины»... И в физике моментов тоже немало. Но – все по порядку.

Возьмем велосипедное колесо радиусом r и, закрепив его ось вертикально, приложим к его ободу пару сил с моментом, равным $M_z = (F_\phi/2) \cdot 2r$ (рис.1,а). Но, может быть, не все помнят, что такое момент силы? Так вот, это произведение

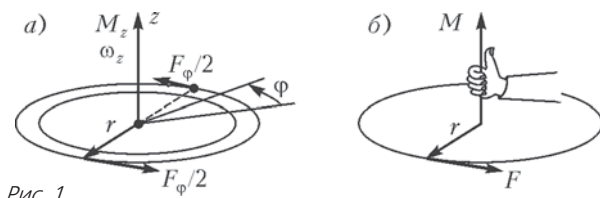


Рис. 1

кратчайшего расстояния между направлением вектора силы и осью вращения (в данном случае – радиуса колеса) на величину самой силы. Еще говорят, что это вектор (\vec{M}), перпендикулярный одновременно и вектору силы (\vec{F}) и радиусу-вектору (\vec{r}), а его направление указывает большой палец правой руки, если остальные пальцы «обнимают ось вращения» (рис.1,б). А можно сказать иначе: момент направлен так, чтобы с его вершины вращение представлялось происходящим против часовой стрелки.

Но что же происходит с велосипедным колесом? Если пара сил с моментом, равным по величине $M_z = rF_\phi$, действует постоянно, то колесо, оставаясь на месте, будет вращаться все

быстрее. Этот несомненный факт можно описать с двух точек зрения.

Начнем с «линейной» точки зрения. Все участки колеса массой m имеют одинаковую линейную (окружную) скорость v_ϕ , а значит, один и тот же импульс величиной $p_\phi = mv_\phi$. Изменение этого импульса можно описать вторым законом Ньютона:

$$\frac{dp_\phi}{dt} = F_\phi. \quad (1)$$

Умножим обе части этого уравнения на постоянную величину радиуса r :

$$\frac{d(rp_\phi)}{dt} = rF_\phi = M_z. \quad (2)$$

Обратим внимание, как замечательно тут уже выстроились индексы: сила направлена в плоскости вращения колеса, перемещение точек которого описывается изменением угла ϕ ; ее момент, как уже описано, направлен вдоль оси z ; ну, а радиус r направлен вдоль себя самого. И что же теперь утверждает это уравнение? А то, что, подобно тому как есть момент силы, равный rF_ϕ , существует момент импульса rp_ϕ и что его изменение во времени равно моменту силы.

Теперь посмотрим с «угловой» точки зрения. Введем понятие угловой скорости, величина которой равна

$$\omega_z = \frac{v_\phi}{r}.$$

В этой записи уже содержится информация, что куда направлено: в частности, она указывает на то, что угловая скорость направлена вдоль оси вращения. Можно перегруппировать символы в выражении для момента импульса:

$$rp_\phi = rmv_\phi = rmr\omega_z = mr^2\omega_z.$$

И тут появляется еще один момент, связанный с инертностью колеса, — момент инерции

$$J_z = mr^2.$$

Ему даже приписан индекс, напоминающий о том, вокруг какой оси происходит вращение. Заметим, что эта величина зависит не только от массы, но и от того, как эта масса распределена относительно оси вращения (в случае колеса она вся распределена по его ободу). Значит, уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = M_z, \text{ или } \frac{dL}{dt} = M_z. \quad (3)$$

Здесь уже видны три момента: момент инерции J_z , момент импульса $L = J_z \omega_z$ и момент силы M_z . И все эти моменты связаны с осью вращения z .

Тут можно вспомнить хрестоматийный случай с фигуристкой на льду, которая вращается вокруг вертикальной оси. Если пренебречь трением коньков о лед и сопротивлением воздуха (точнее, тормозящим моментом силы сопротивления), то в правой части уравнения (3) можно написать «ноль»; значит, момент импульса не изменяется со временем: $J_z \omega_z = \text{const}$. Поэтому, прижимая руки к телу или моментально разбрасывая их в стороны, фигуристка изменяет момент инерции и, следовательно, увеличивает или уменьшает свою угловую скорость.

Но не думайте, что мы перечислили все моменты механики. Есть еще один интересный момент.

Пусть наше колесо принадлежит велосипеду, который поворачивает, например, налево (рис.2; вид сверху). Собственный

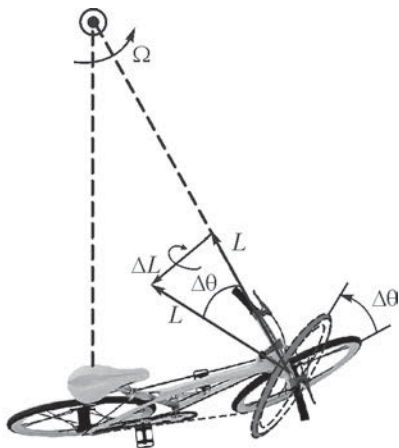


Рис. 2

момент импульса колес лежит в горизонтальной плоскости (попросим велосипедиста не наклоняться). Если движение центра масс происходит по окружности, то его можно описать как вращение с угловой скоростью Ω , которая, как мы уже легко установили, направлена вертикально вверх. Но что же происходит? Через малый промежуток времени Δt собственные моменты импульса (угловые моменты) колес повернутся на угол $\Delta\theta = \Omega \Delta t$. Это значит, что вектор \vec{L} , равный $L = J\omega$, получит приращение $\Delta\vec{L}$. Но как оно направлено? Видно, что этот вектор

лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен как вектору момента импульса, так и оси вращения Ω . Но, взглянув вдоль вектора $\Delta \vec{L}$, мы заметим, что это приращение вектора \vec{L} можно приписать действию какого-то нового момента, направленного вдоль вектора $\Delta \vec{L}$, причем $\Delta L = M_r \Delta t$. Действие этого момента показано стрелкой, «обнимающей» вектор $\Delta \vec{L}$. Это так называемый гироскопический момент (как видим, он стремится «завалить» велосипедиста в сторону поворота).

Теперь мы знаем, что попытка изменить направление оси вращения тела (гироскопа), обладающего собственным моментом импульса, приводит к возникновению гироскопического момента, перпендикулярного как самому моменту импульса, так и оси вращения. И вы легко сообразите, как будет направлен гироскопический момент, наблюдая за автомобилем с вращающейся бетономешалкой, поворачивающим за угол, или за выполняющим вираж одномоторным самолетом с вращающимся винтом. Или поймете, в какой плоскости расположить массивный маховик на военном корабле с целью уменьшить качку и повысить точность стрельбы, или...

И тут надо сделать добровольное признание. Вы заметили, что в тексте почти нигде угловая скорость не называется вектором? Это не случайно: дело в том, что угловая скорость не вектор, а псевдовектор, т.е. как бы не совсем вектор. Более того, с моментом инерции еще сложнее – это не вектор и не скаляр, а, страшно сказать, тензор. Добавим, давление – тоже тензор, но никого это не травмирует. Однако об этом поговорим не сейчас, а когда вы поступите в Московский физико-технический институт. А пока что достаточно того, что, если вы в автобусе объявите, что момент импульса – это псевдовектор, вам уступят место.

А что же Земля? Ведь это тоже гироскоп, ось вращения которого и «вектор» угловой скорости величиной $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ (где $T_1 = 1$ сутки) наклонены к плоскости орбиты, т.е. составляют некоторый угол ($\approx 23^\circ$) с «вектором» орбитальной угловой скорости $\Omega = \frac{2\pi}{T_2}$ (где $T_2 = 1$ год) – чем и объясняется смена времен года (рис.3). А Солнце вращается вокруг своей оси, и вся солнечная система вращается вокруг центра Галактики, а Галактика, в свою очередь...

Конечно, Земля не колесо и не вся ее масса находится на одном и том же расстоянии от оси вращения – часть массы на самой оси, часть вблизи оси, так что для этих частей r^2 меньше R^2 , т.е. радиуса Земли в квадрате. Поэтому ее момент инерции

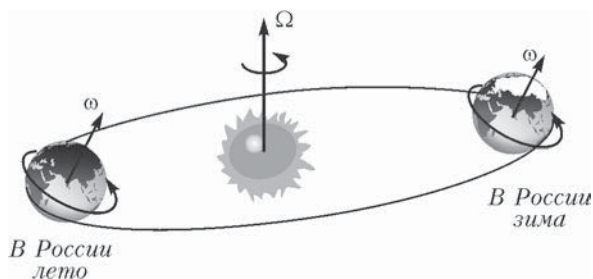


Рис. 3

относительно оси вращения не mR^2 , а $\frac{2}{5}mR^2$ (в предположении однородного шара). А поскольку земной шар есть тоже гироскоп, попробуйте перед сном представить в ее атмосфере и на поверхности многочисленные гироскопы – тайфуны, смерчи, торнадо, колеса автомобилей, вагоны локомотивов, роторы динамомашин и текстильных прялок... на которые действуют гироскопические моменты уже хотя бы потому, что они находятся на вращающейся платформе. А еще надо вспомнить, что каждый электрон обладает как собственным, так и орбитальным моментами, и не забыть при этом о каждом атоме, каждой молекуле...

И когда вы все это представите, в этот момент вы испытаете большое удовольствие.

ИОНОСФЕРА И ШУМ ЦУНАМИ

А.Стасенко

«Поднялась к небу волна высоты неизмеримой, закрыла грудью половину неба и, качая белым хребтом, согнулась, переломилась, упала на берег и страшной тяжестью своею... смыла весь берег» (М.Горький). Таково художественное описание катастрофических явлений, время от времени происходящих у берегов теплых стран и уже унесших жизни сотен тысяч людей.

Но при чем тут ионосфера, расположенная на высоте порядка сотен километров над землей и морем? А вот послушайте.

Вспомним, как объясняют поведение вещества, попавшего во внешнее постоянное электрическое поле с напряженностью \vec{E}_0 . Пусть имеется плоский слой вещества, состоящего из частиц с положительными и отрицательными зарядами в равных количествах, так что этот слой в целом электрически нейтрален. И пусть он находится в электрическом поле, перпендикулярном плоскостям этого слоя. Под действием поля положительные заряды

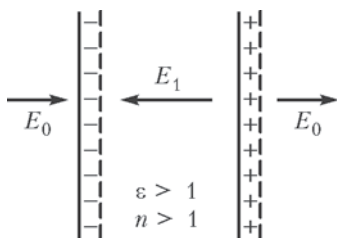


Рис. 1

сместятся в направлении вектора \vec{E}_0 , отрицательные – в противоположном направлении, так что на обеих плоскостях слоя возникнут поверхностные заряды, которые породят вторичное поле \vec{E}_1 , противоположное по направлению полю \vec{E}_0 (рис.1). Это, так сказать, нормальное поведение вещества, поляризованного внешним

полем. Его состояние можно описать такими макроскопическими характеристиками, как диэлектрическая проницаемость ϵ и коэффициент преломления n . Обе эти величины больше единицы. В случае вакуума они равны единице.

Теперь посмотрим, что произойдет, если внешнее электрическое поле изменяется во времени, например по синусоидальному закону

$$E = E_m \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь E_m – амплитуда, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота колебаний поля, T – период колебаний. Конкретизируем вещество – пусть оно состоит из электронов и положительно заряженных ионов, т.е. представляет собой плазму. Как известно, самый легкий из ионов (протон) почти в две тысячи раз тяжелее электрона, поэтому переменное электрическое поле будет заметно смещать в течение периода только электроны, и о ионах можно не думать – они нужны только для того, чтобы вещество в среднем (в пространстве и в течение временного периода) оставалось электронейтральным.

Второй закон Ньютона, описывающий динамику электрона в заданном переменном электрическом поле, запишем в виде

$$a = -\frac{e_0 E_m}{m_e} \sin \omega t = v'_e = x''_e. \quad (2)$$

Здесь a – это ускорение, m_e – масса электрона, e_0 – величина его заряда; знак «минус» учитывает, что сила, действующая на электрон, направлена против поля; в конце строчки формул сделано напоминание, что ускорение есть первая производная от скорости или вторая производная от смещения из положения равновесия (когда $x_e = 0$).

Тот, кто умеет интегрировать, сразу скажет, что для определения смещения по известному гармонически изменяющемуся ускорению нужно последнее умножить на $-1/\omega^2 = -(T/2\pi)^2$.

А для того, кто не умеет, достаточно предложить следующую аналогию. Рассмотрим малые колебания груза массой m на нити длиной l . Этим «грузиком» может вообразить себя Читатель, а «нитью» пусть будут стропы качелей. Нарисуем изменения во времени кинематических характеристик груза: ускорения a , скорости v , смещения x (рис.2; ось t направлена вниз). Поскольку колеба-

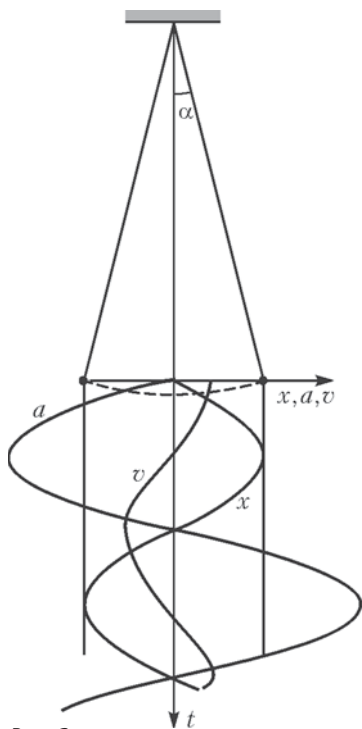


Рис. 2

ния гармонические, смещение можно записать в виде

$$x = x_m \sin \omega t ,$$

где x_m – амплитуда малых колебаний, а их частота, как известно, равна $\omega = \sqrt{g/l}$ (g – конечно, ускорение поля тяготения). Сила, возвращающая Читателя в положение равновесия, равна

$$F = -mg \sin \alpha \approx -mg \frac{x}{l} ,$$

откуда ускорение равно

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{g}{l} x = -\omega^2 x ,$$

и смещение –

$$x = -\frac{a}{\omega^2} , \quad (3)$$

что и требовалось показать. Тут самое главное – знак «минус», т.е. тот факт, что при колебаниях ускорение направлено противоположно смещению.

Разумеется, тот же результат даст и решение уравнения (2).

Вернемся к нашему веществу, находящемуся в переменном электрическом поле. На рисунке 3 изображена картина полей и зарядов в тот момент, когда напряженность внешнего электрического поля достигла наибольшего (амплитудного) значения E_m . Согласно выражению (3), в этот момент смещение зарядов прямо противоположно той картине (см. рис.1), которая была при стационарном поле. В результате такого разделения зарядов возникает поле \vec{E}_1 , усиливающее внешнее поле.

Тут надо ожидать чего-то необычного – и вот оно-таки появляется. А именно, можно ожидать, что, в отличие от электростатики, где диэлектрическая проницаемость и коэффициент преломления больше единицы, тут будет все наоборот: $\epsilon < 1$, $n < 1$. Но последнее неравенство, согласно определению $n = c_0/c$, дает значение $c > c_0$ – скорость электромагнитной волны в плазме больше, чем в вакууме! Пора кричать «караул» и вызывать милицию, поскольку это противоречит основному постулату современной физики. Но подождем, что будет дальше.

А дальше вспомним, как вводится такая безразмерная макроскопическая характеристика вещества, как ϵ :

$$P_e = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E . \quad (4)$$

Смысл P_e понятен хотя бы из соображений размерности. Действительно, $[\epsilon_0] = \Phi/\text{м}$, $[E] = \text{В}/\text{м}$ (вспомним привычный плоский конденсатор), тогда

$$[P_e] = [\epsilon_0 E] = \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} .$$

Отсюда видно, что P_e – это объемная плотность электрических диполей. Получается, что, если каждый электрон сместился из положения равновесия на x , возник электрический диполь с моментом

$$p_e = -e_0 x .$$

А если электронов в единице объема N_e , то общий дипольный момент этой единицы объема будет

$$N_e p_e = -N_e e_0 x = P_e .$$

Записав выражение (3) в виде

$$x = -\frac{a}{\omega^2} = -\frac{F}{m\omega^2} = -\frac{(-e_0 E)}{m_e \omega^2} ,$$

из равенства (4) получим

$$-\frac{N_e e_0^2 E}{m_e \omega^2} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$$

и, сократив на E , найдем

$$\epsilon = 1 - \frac{N_e e_0^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} < 1 . \quad (5)$$

Понятно, что при $N_e = 0$ (нет ни электронов, ни ионов) имеем $\epsilon = 1$, как и полагается для вакуума. Кроме того, поскольку заряд входит в квадрате, знак его не имеет значения: если каким-то чудом закрепить электроны, то движение ионов даст качественно тот же результат, но гораздо более слабый из-за их большой массы.

Но вот что самое любопытное: существует такое значение частоты внешнего электромагнитного поля, при котором полученная диэлектрическая проницаемость становится равной нулю! Это так называемая плазменная частота:

$$\omega_p^2 = \frac{N_e e_0^2}{\epsilon_0 m_e} . \quad (6)$$

При этой частоте плазма становится похожей на металл, а от металла электромагнитные волны отражаются. Благодаря этому и было обнаружено существование высотных ионосферных слоев и возможность дальней радиосвязи.

Да, а как же быть с тем, что скорость электромагнитной волны в плазме получилась больше, чем скорость света в вакууме: $c > c_0$? Ничего страшного: дело в том, что этот результат получен для случая идеальной гармонической волны, которая, по определению, существовала до возникновения Вселенной и будет существовать вечно. Но такой волны не бывает! Реально существует волновой пакет, ограниченный в пространстве и времени, состоящий из набора волн с различными частотами и, значит, с различными скоростями распространения в плазме. Эти составляющие гармоники, обгоняя друг друга и отставая друг от друга, несут суммарную энергию со скоростью, не превосходящей c_0 , — с так называемой групповой скоростью.

Полученные выше выражения (5) и (6) оказались полезными прежде всего для исследования верхней атмосферы. Из них видно, например, что, изменяя ω , можно найти значение N_e , т.е. концентрацию электронов в ионосфере.

Но при чем здесь цунами — гигантская волна, порождаемая подводным землетрясением? А вот при чем. Длина такой уединенной волны — эти волны называют солитонами — порядка десятков и сотен километров (поэтому они и не очень-то заметны в открытом океане). Для такой волны океан, а тем более прибрежные отмели, — мелкие лужи. Поэтому скорость цунами можно оценить по формуле теории «мелкой воды»:

$$v = \sqrt{gh} \text{ (проверьте размерность).}$$

Полагая $h \sim 10^3$ м, получим

$$v \sim \sqrt{10 \text{ м/с}^2 \cdot 10^3 \text{ м}} = 10^2 \text{ м/с}$$

— не всякий байкер выжмет такую скорость! Так вот, этот солитон возмущает атмосферу — от него идет мощная акустическая волна. Дойдя до ионосферы, волна периодически изменяет концентрацию электронов N_e . А зондируя возмущенную ионосферу при помощи электромагнитных волн, можно за тысячи километров узнать о приближающейся опасности.

Поистине чудесным образом здесь оказались связанными волны различной физической природы!

КРАСНОЕ НЕБО, СИНЯЯ ЛУНА

А.Стасенко

*Закат из золотого стал как медь,
Покрылись облака зеленой ржой...*

Н.Гумилев

Но – синяя луна, красное небо – неужели такое бывает?

– А вот и бывает. Однако, все по порядку...

Начнем с того, что знает каждый отличник: электромагнитная волна бежит со скоростью света, векторы электрического и магнитного полей, точнее векторы их напряженностей, в волне перпендикулярны друг другу и направлению ее распространения. Образно говоря, она дважды поперечна, в отличие от звуковой волны в газе, которая всего лишь единожды продольна.

Напряженность электрического поля E , как известно, измеряется в вольтах на метр: $[E] = \frac{В}{м}$. Скажем несколько слов и о напряженности магнитного поля H . (Подчеркнем – именно о напряженности, а не об индукции B , которая, впрочем, строго пропорциональна H , по крайней мере в вакууме, но имеет другую размерность.) Представим себе провод с постоянным током силой I (рис.1). Согласно одному из законов электромагнетизма, вокруг этого провода существует магнитное поле, линии напряженности которого представляют собой окружности, соосные с током. Причем произведение напряженности H поля на длину $2\pi r$ любой окружности радиусом r как раз и равно силе тока:

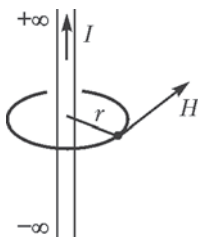


Рис. 1

$$H \cdot 2\pi r = I .$$

(Левую часть этого равенства физики называют циркуляцией вектора H по контуру, длина которого в рассматриваемом

частном случае равна $2\pi r$.) Отсюда видна и размерность напряженности магнитного поля: $[H] = \frac{A}{m}$.

Разумно предположить, что если выделить только кусок длиной l этого бесконечного провода, то его вклад H_l , в суммарную величину напряженности поля (по крайней мере, в меридиональной плоскости) будет пропорционален не только I , но и l . Произведение Il можно назвать элементом тока, его размерность $[Il] = A \cdot m$.

Далее, известно, что электромагнитное поле распространяется даже в вакууме (причем, свободнее всего) благодаря тому, что переменные (во времени) электрическое и магнитное поля порождают друг друга. Как тут не предположить, что напряженности этих полей связаны соотношением пропорциональности:

$$E \sim H. \quad (1)$$

А что если их перемножить? По крайней мере, любопытно узнать размерность произведения:

$$[EH] = \frac{В}{м} \cdot \frac{А}{м} = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{с \cdot м^2}.$$

Но ведь это размерность плотности потока энергии P , т.е. энергии, протекающей в единицу времени через перпендикулярную площадку единичной площади. Эта плотность потока называется вектором Пойнтинга – по имени английского физика Джона Генри Пойнтинга, который ввел это понятие в 1884 году. Заметим, что для упругой волны аналогичное понятие еще раньше (1874 г.) было введено русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым. Поэтому плотность потока энергии любой физической природы справедливо называют вектором Умова–Пойнтинга. Но здесь нас будет интересовать именно электромагнитное поле.

Итак,

$$EH = P. \quad (2)$$

Однако постоянный ток не может породить электромагнитную волну. Для ее возникновения нужно, чтобы ток стал переменным, например синусоидальным с периодом T или частотой $\omega = 2\pi/T$:

$$I = I_m \sin \omega t.$$

Тогда магнитное поле будет пропорционально скорости (темпу) изменения тока со временем, или, как говорят умные люди, пропорционально первой производной тока по времени

$$I' = \omega I \sim \frac{I}{T}, \quad [I'] = \frac{A}{с}.$$

Тут, конечно, стоило бы поговорить о производной с математической точки зрения. Но нам достаточно того, что размерность этой величины должна содержать секунду в знаменателе, т.е. быть обратной пропорциональной периоду T изменения тока или прямо пропорциональной частоте этого изменения ω . Тогда получим

$$H_l \sim \frac{I'l}{r}. \quad (3)$$

Появление в знаменателе расстояния r от излучателя не случайно: оно есть результат закона сохранения потока энергии. Действительно, плотность потока энергии (2) должна убывать с расстоянием как $1/r^2$. А поскольку напряженности электрического и магнитного полей пропорциональны друг другу (1), то каждая из них пропорциональна $1/r$.

Теперь представим нужный нам переменный ток как результат колебательного движения вверх-вниз положительного электрического заряда q в пределах отрезка длиной l (рис.2). Когда этот заряд q находится в центре отрезка, его компенсирует неподвижный заряд противоположного знака; когда q смещается на расстояние x ($|x| < l$), возникает электрический диполь с моментом qx , хотя отрезок в целом остается электрически нейтральным. Но поскольку заряд движется со скоростью $v = x'$ (ведь скорость – это производная от расстояния по времени), его можно уподобить элементу тока

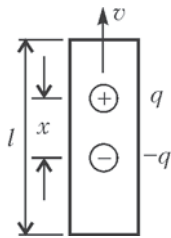


Рис. 2

$$Il = qv = qx', \quad [qv] = \text{Кл} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} \cdot \text{м} = \text{А} \cdot \text{м},$$

причем $I'l = qv' = qx''$. Значит, выражение (3) можно переписать в виде

$$H_l \sim \frac{I'l}{r} = \frac{qx''}{r} \sim \frac{ql\omega^2}{r}.$$

Понятно, что квадрат частоты возник от того, что мы дважды брали производную от смещения заряда $x = l \sin \omega t$. Теперь, вспомнив (1) и (2), получим плотность потока энергии:

$$P_l = E_l H_l \sim \left(\frac{qv'}{r} \right)^2 \sim q^2 l^2 \frac{\omega^4}{r^2}.$$

Тут уже есть, чем полюбоваться. Во-первых, векторы \vec{P}_l , \vec{E}_l , \vec{H}_l (рис.3) взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку (как координаты x , y , z декартовой системы) – это, как

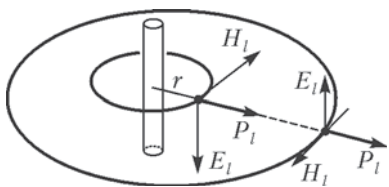


Рис. 3

упоминалось в самом начале, знает каждый отличник. Понятно, что вектор плотности потока энергии направлен по радиусу от излучающей «элементарной антенны длиной l », а его модуль убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от диполя (при $r \gg l$). Последнее наблюдение отражает закон сохранения энергии (уже использованный выше): ее полный поток зависит от площади $4\pi r^2$ сферы радиусом r , поэтому, суммируя *плотности* потока энергии по всем направлениям от диполя (а не только в меридиональной плоскости, как показано на рисунке 3), получим полный поток энергии:

$$W \sim q^2 l^2 \omega^4, \quad [W] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Рисунок 3 демонстрирует также, что через половину длины волны направления векторов электрического и магнитного полей изменяются на противоположные, в то время как вектор Пойнтинга всегда направлен по радиусу-вектору, проведенному из середины диполя.

Но вот что самое интересное: полный поток энергии W оказался пропорциональным четвертой степени частоты колебаний тока. Эта зависимость получена (1871 г.) замечательным английским физиком Джоном Уильямом Рэлеем, а само явление, описываемое выражением (4), называли рэлеевским рассеянием. И это позволяет объяснить многие интересные факты.

Например, почему небо обычно голубое, хотя в солнечном спектре (который глаз воспринимает в диапазоне длин волн приблизительно от 0,4 до 0,75 микрон – от фиолетового до красного участков) присутствуют все цвета? Теперь мы можем объяснить это следующим образом. Атмосфера не совсем однородна: в ней в любой точке происходят так называемые флуктуации плотности – постоянно образуются и распадаются сгустки и разрежения. Относительная флуктуация концентрации молекул тем более вероятна, чем меньшее количество N молекул в ней участвует, так что $N = \langle N \rangle (1 \pm 1/\sqrt{\langle N \rangle})$, где $\langle N \rangle$ – среднее значение за достаточно большой промежуток времени. Световые волны, идущие от Солнца, воспринимают эти сгустки как частицы. А поскольку длина волны синего цвета меньше, чем красного, то, согласно, выражению (4), он и сильнее рассеивается. По этой же причине Солнце и Луна при закате и восходе

часто кажутся красными: путь света в атмосфере в скользящих лучах становится большим, и все интенсивнее отсеивается во все стороны преимущественно голубая компонента.

Но рэлеевское рассеяние соответствует случаю очень мелких частиц, размеры которых a много меньше длины волны λ . А что если рассматривать более крупные частицы? Как показали исследования, при некоторых a наблюдаются максимальные значения так называемого коэффициента рассеяния Q . Зависимость этой оптической характеристики от произвольного значения отношения a/λ (рис.4) позволяет объяснить и кое-какие непривычные явления. Так, более полувека тому назад на большей части Европы Солнце и Луна казались голубыми из-за рассеяния их света на частицах, занесенных высотными ветрами из горящих лесов Канады (через Атлантику!). Значит, из лучей, идущих от этих небесных тел, отсеивались красная и желтая компоненты и оставалась преимущественно коротковолновая часть спектра. Этот факт можно объяснить, например, тем, что красному свету соответствовал максимум (точка K), а синему – минимум (точка C) на приведенной кривой рассеяния.

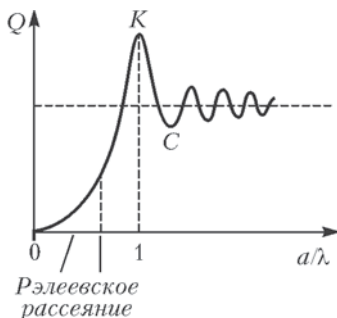


Рис. 4

А еще раньше древние хроники – и римские, и китайские – сообщали о красном небе. Как оказалось, произошло извержение вулкана (186 г.) в Новой Зеландии, т.е. в южном полушарии, отделенном от северного не только экватором, но и муссонными и пассатными ветрами!

И уж совсем недавно (2004 г.) в популярной телевизионной передаче сообщалось, что Землю ждет не потепление, а *потемнение*: уже 20% солнечного излучения не доходит до ее поверхности, так как в атмосфере сажи оказалось вдвое больше, чем прогнозировали.

ЭНТРОПИЯ, ДЕМОН МАКСВЕЛЛА И ТЕПЛОВАЯ СМЕРТЬ ВСЕЛЕННОЙ

А.Стасенко

*Бешено выли слухофоны и мигали смотроскопы.
Сквозь заклепки сочились кванты.
Черная энтропия росла.*

Из фантастического романа

Начнем с чего-нибудь вкусного. Представим себе космонавта, у которого в прозрачной банке находятся 10 конфет и 10 орехов. (Космонавт нужен для невесомости, чтобы не заботиться о силе тяготения.) Интуитивно ясно, что если банку до этого сильно трясли, то орехи и конфеты распределились в ней равномерно по объему. Но вот космонавт снова трясет эту банку и хочет, чтобы орехи собрались в одной половине банки, а конфеты – в другой. Какова вероятность p этого результата, или, другими словами, из скольких случаев распределения $N = 1/p$ один случай даст желаемый результат? Ясно, что для каждого из предметов вероятность оказаться в заданной половине банки равна $1/2$; для десяти таких предметов она составит $(1/2)^{10}$. Но поскольку имеются предметы двух сортов, то вероятность их желанного разъединения составит $\left((1/2)^{10}\right)^2 = (1/2)^{20}$. Значит, только один из 2^{20} вариантов может привести к желаемому результату. Конечно, все эти рассуждения верны «в среднем» – это понятие в ходу и в теории вероятностей, и в быту.

Перейдем теперь к классическому примеру двух разных газов, находящихся в сосуде по обе стороны от разделяющей их перегородки. И пусть каждый из них наличествует в количестве одного моля; значит, имеется число молекул каждого газа, равное числу Авогадро, т.е. $6 \cdot 10^{23}$ штук. (Теперь условие невесомости нам не нужно: в размерах банки вертикальная неоднородность распределения молекул, в отличие от атмосферы, не существенна. И трясти не нужно, потому что молекулы, в отличие от конфет и орехов, обладают приличными скоростями движения.)

И вот, в некоторый момент перегородку убирают, и начинается – что? правильно – смешение газов. И всем понятно, что это смешение будет стремиться к равномерному распределению каждого газа по всему объему сосуда – опять же «в среднем». А теперь поставим уже знакомый нам вопрос: из скольких распределений одно окажется таким, что газы вновь вернуться в начальное состояние, т.е. произойдет их самопроизвольное разделение по двум половинкам сосуда? Но теперь ответ нам известен по аналогии с предыдущим: вариантов будет $\left(2^{6 \cdot 10^{23}}\right)^2$.

Конечно, общаться с такими громадными числами неудобно, и физики давно догадались, что достаточно обсуждать только показатель степени таких чисел, т.е. использовать их логарифм. И тут возникли понятия *энтропии* и *информации*.

Понятие *энтропии* (S) ввел в науку Рудольф Клаузиус в 1865 году. Будучи термодинамиком, он рассуждал не о молекулах (термодинамика не интересуется структурой вещества), а о температуре, теплоте, давлении, плотности ... И определил изменение энтропии данного количества вещества ΔS как отношение подведенного к нему количества теплоты δQ к температуре T :

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T}.$$

Значит, если иметь в виду один моль вещества, то размерность энтропии будет Дж/(К · моль), что совпадает с размерностью молярной теплоемкости – а это очень понятно для всех термодинамиков. (Отметим, что изменения энтропии и количества теплоты отмечены разными символами. В этом есть глубокий смысл, но его можно понять, только поступив в Московский физико-технический институт.)

Казалось бы, что произошло особенного? Ну введена еще одна термодинамическая величина. Но, оказывается, это действительно особенная функция – единственная, которая определяет направление процесса. А именно – в замкнутой системе энтропия растет со временем!

Что там еще растет – в сосуде с первоначально разделенными газами? Число молекул не изменяется, температура – тоже (если сосуд теплоизолирован)... А растет – беспорядок. Действительно, вначале был порядок – например, одни молекулы справа, другие слева, а в результате – «смешались в кучу кони, люди...» В итоге энтропия получила у физиков статус меры беспорядка, а у лириков – мрачный эпитет «черная». А тут еще вспоминается величайший принцип термодинамики, очевидный для каждого

человека: тепло всегда течет от горячего тела к холодному. Жизнь на земле возможна потому, что Солнце горячее. А если Солнце примет ту же температуру, что и Земля? Страшно подумать. И тут возникла теория тепловой смерти Вселенной. Знаменитые физики, философы, религиозные мыслители сотню лет высказывались об этом совершенно определенно. Приведем лишь несколько цитат:

«Вселенная не может существовать вечно; рано или поздно должно наступить время, когда ее последний эрг энергии достигнет наивысшей ступени на лестнице падающей полезности, и в этот момент активная жизнь вселенной должна будет прекратиться» (Джеймс Джинс, 1930 г.).

«Вся вселенная достигнет теплового равновесия в будущем в срок, который не бесконечно удален» (Артур Эддингтон, 1935 г.).

«Закон энтропии, открытый Рудольфом Клаузиусом, дал нам уверенность, что... в замкнутой материальной системе в конце концов этот процесс в макроскопическом масштабе когда-то прекратится. Эта печальная необходимость ... красноречиво свидетельствует о существовании Необходимого Существа» (Папа Пий XII, 1952 г.).

Следующий шаг сделал Людвиг Больцман. Согласно его рассуждениям, энтропию системы можно определить через логарифм числа возможных состояний N :

$$S \sim \log_2 N ,$$

или (формула Больцмана)

$$S = k \ln N ,$$

где k – постоянная Больцмана. Очевидно, что любой логарифм по одному из оснований можно легко выразить через логарифм по другому основанию. (Мы сохраняем основание 2, чтобы опираться на приведенные выше рассуждения о двух частях сосуда.)

Итак, рост энтропии (в замкнутой системе) ассоциируется с ростом беспорядка – различные газы самопроизвольно смешиваются, температура соприкасающихся тел выравнивается. И тут великий Джеймс Клерк Максвелл придумал Демона. Это существо (или устройство) расположилось у отверстия в перегородке, разделяющей две половины сосуда, и занимается следующей деятельностью: увидев «горячую» молекулу (т.е. более быструю, чем средние), подлетающую к отверстию справа, оно пропускает ее налево, а увидев с другой стороны «холодную» молекулу, пропускает ее направо. В результате такой деятельно-

сти газ слева оказывается горячим, справа – холодным (или газы оказываются вновь разделенными).

Предпринималось множество попыток «изгнать Демона» – запретить ему столь противоестественный процесс. Пожалуй, наиболее удачная из них связана с теорией информации.

А как ввести меру *информации*? Если вам сейчас скажут, что вы читаете замечательный журнал «Квант», полученная вами информация равна нулю. А если вы услышите, что из семи миллиардов людей компьютер присудил именно вам Нобелевс-

кую премию (вероятность чего $p = \frac{1}{7 \cdot 10^9} \approx 1,5 \cdot 10^{-10}$) – это вас чрезвычайно заинтересует. Итак, информация об очевидном событии равна нулю, о маловероятном – очень высока, о невероятном – бесконечна. И опять – как это похоже на свойства логарифмической функции! Поэтому было решено, что если из двух равновероятных событий осуществляется одно, то полученная об этом информация равна единице: $I = \log_2 2 = 1$. (Если отмеченная нами молекула находится в левой части сосуда, а не в правой, то информация об этом равна 1.) А если из N равновероятных событий осуществилось какое-то одно, то информация об этом равна

$$I = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{p}.$$

Но ведь это очень похоже на больцмановское определение энтропии. Поэтому были сказаны замечательные слова: мерой информации может служить *негэнтропия*! (негативная энтропия, т.е. отрицательная энтропия). И значит, получая информацию, т.е. наводя порядок в голове, мы увеличиваем энтропию, т.е. беспорядок во Вселенной. Тут и начинается изгнание Демона.

Итак, чтобы увидеть подлетающую молекулу, например, азота, необходимо иметь по крайней мере один квант $h\nu$ света, который молекула должна «проглотить и выплюнуть». Но ведь при этом она получит импульс отдачи, равный $-2h\nu/c$. Много это или мало? Сравним с собственным импульсом молекулы, имеющим порядок $m\langle v_T \rangle$, где $\langle v_T \rangle$ – средняя тепловая скорость, которая, как известно, порядка (немного больше) скорости звука. Получаем

$$\frac{2h\nu/c}{m\langle v_T \rangle} = \frac{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 28 \cdot 500} \sim 10^{-4} \ll 1.$$

Здесь $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

– скорость света, $v = 10^5 \text{ с}^{-1}$ – его характерная частота в оптическом диапазоне, масса молекулы азота равна массе протона $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, умноженной на относительную молекулярную массу азота 28, средняя тепловая скорость принята равной 500 м/с . Значит, переизлучение одного кванта не очень сильно изменит скорость молекулы. Но проблема еще в другом: этот переизлученный квант не обязательно вернется к излучателю. Если его направление равновероятно, то вероятность поймать вернувшийся квант порядка $\Omega/(4\pi)$, где Ω – телесный угол, под которым виден зрачок глаза Демона (или входное устройство регистрирующего прибора). Следовательно, квантов, «освещающих» приближающуюся молекулу, должно быть много – и кто знает, насколько они затормозят желанную быструю молекулу. Причем использование даже одного кванта приведет к росту энтропии системы $\Delta S = \frac{h\nu}{T}$. Итак, старания этого Демона бесполезны.

А что же теория тепловой смерти Вселенной? С разных позиций ее «изгоняют» сам Людвиг Больцман, а также Мириан Смолуховский, Фридрих Энгельс, Илья Пригожин. Последний предложил (1945 г.) энтропию представить в виде двух частей: $S = S_e + S_i$, где S_e – внешняя энтропия, (индекс e – от слов exchange, external, т.е. обменная, внешняя), а S_i – внутренняя энтропия (индекс i – от слова inner, т.е. внутренняя). Так вот, в реальности растет только внутренняя энтропия замкнутой системы, а внешняя может и убывать за счет обмена с другими системами.

В двадцатом веке астрофизики открыли черные дыры, без остатка поглощающие вещество и излучение. Но ведь вместе с ними эти дыры поглощают и энтропию – значит, способствуют росту порядка во Вселенной. И не служат ли они отверстиями для общения с другими вселенными? Ибо физики уже не раз выдвигали идею о том, что наш мир является одним из (по крайней мере) двух, а то и бесконечного множества миров.

Как тут не вспомнить древнегреческого философа:

«Мир, единый из всего, не создан никем из богов и никем из людей, а был, есть и будет вечно живым огнем, закономерно воспламеняющимся и закономерно угасающим» (Гераклит Эфесский, VI–V вв. до н.э.).

ПРЕДЕЛЫ ТОЧНОСТИ «ТОЧНЫХ» НАУК

А.Стасенко

Я не могу объяснить, почему Природа ведет себя так, а не иначе... Так что я надеюсь, что вы сможете принять природу такой, как она есть – «абсурдной».

Р.Фейнман

Наверное, новоселы удивились бы, узнав, что чем осторожнее они несут рояль, тем меньше шансов попасть в дверь. А ведь физика утверждает именно это.

Начнем с того, что существует так называемый принцип неопределенности (или соотношение неопределенностей), который говорит, что невозможно одновременно точно узнать импульс тела и его положение в пространстве. Физики указывают и меру этой неопределенности. Если неопределенность в измерении импульса $p_x = mv_x$ обозначить через Δp_x , а неопределенность координаты – через Δx , то их произведение оказывается тесно связанным с одной из фундаментальных констант – с постоянной Планка \hbar :

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1)$$

Эта постоянная – очень малая величина, она приблизительно равна 10^{-34} Дж·с, но все-таки не нулю! Поэтому, если предположить, что рояль имеет массу m ($m \sim 100$ кг), из соотношения

(1) получим неопределенность его координаты: $\Delta x \sim \frac{\hbar}{m \Delta v_x}$. И

если кто-то заявит, что скорость перемещения рояля известна абсолютно точно, т.е. $\Delta v_x \rightarrow 0$, то отсюда следует $\Delta x \rightarrow \infty$. Иными словами, вообще неизвестно, где находится рояль.

Подчеркнем, что это соотношение неопределенностей не связано с точностью каких-либо измерительных приборов, а является фундаментальным свойством материи: природа запретила нам знать, что находится в прямоугольнике площадью порядка \hbar , нарисованном в плоскости с осями координат p_x и x (рис.1).

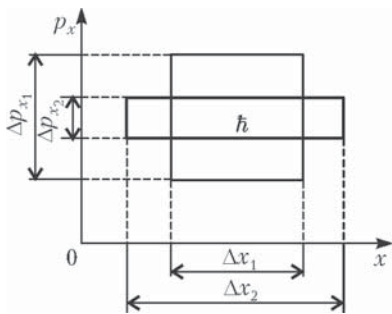


Рис. 1. Иллюстрация принципа неопределенности на плоскости импульс–координата. Оба прямоугольника имеют площадь порядка $\hbar \sim \Delta p_{x_1} \cdot \Delta x_1 = \Delta p_{x_2} \cdot \Delta x_2$

Напомним, что через постоянную Планка выражается энергия кванта излучения $\hbar\omega$, где ω – его круговая (циклическая) частота. Конечно, не случайно эту фундаментальную константу великие физики «не замечали» до XX века: она появилась только с развитием теории равновесного теплового излучения – значит, нам уже не обойтись без понятия температуры T .

И тут вспоминается другой великий физик – Больцман. С его именем связана еще одна фундаментальная константа – постоянная Больцмана k , с помощью которой можно выразить среднюю энергию хаотического теплового движения любого тела вдоль одной из координат, например вдоль той же оси x :

$$\frac{m\langle v_x \rangle^2}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Эта константа тоже невелика: $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Оказывается, любое тело, находящееся в равновесии с окружающей средой, не может пребывать в покое: его центр масс хаотически мечется во всех направлениях, так что средний по времени квадрат скорости равен

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2 = \frac{3kT}{m}.$$

Значит, и центр масс рояля, строго говоря, не находится в покое; его «тепловая» скорость будет порядка

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \sim 10^{-11} \text{ м/с}$$

(здесь мы приняли $T = 300$ К).

Конечно, такое хаотическое метание рояля незаметно в нашем макром мире. Но стоит перейти в микромир и рассмотреть, например, молекулу кислорода, масса которой равна приблизительно тридцати двум массам протона: $m_k = 32m_p = 32 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, как скорость ее хаотического движения получим равной сотням метров в секунду (подставьте значение m_k в предыдущую формулу). И именно в мире атомов «заиграет» в полную силу

принцип неопределенности: если помножить размер атома, в объеме которого находится электрон, на скорость электрона (найденную, например, из условия, что центростремительное ускорение электрону сообщает сила кулоновского притяжения к ядру атома) и на массу электрона, то как раз получим величину порядка \hbar . Этот результат и привел к заключению, что никаких «орбит» (линий с нулевой толщиной) электрона в атоме быть не может.

Кстати о «микром мире». Этот термин был введен для описания поведения атомов и молекул в те времена, когда приставка «микро» (10^{-6}) приписывалась чему-то предельно малому. Но, как оказалось, размеры микрочастиц скорее соответствуют нанодиапазону, т.е. 10^{-9} (в единицах СИ). Так что уже сотню лет назад точнее было бы говорить о «наном мире» — да это слово и больше соответствует современным призывам к «инновациям» и «нанотехнологиям».

Но раз мы заговорили о температуре, о тепловом хаосе, то как не вспомнить замечательный термодинамический цикл Карно, который состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис.2,а). Замечательное свойство этого цикла состоит в том, что машина, работающая по нему, обладает наибольшим коэффициентом полезного действия

$$\eta_{\max} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

И здесь возникает принципиальный вопрос: каким образом количество теплоты Q_1 от нагревателя, имеющего температуру T_1 , передается

рабочему телу тепловой машины, тоже имеющему температуру T_1 ? И точно так же — зачем количеству теплоты Q_2 при температуре T_2 утекать из машины в окружающее пространство (в холодильник) с той же температурой? Ведь нулевое начало термодинамики (в этой науке нет моделей, а есть «начала» и «принципы», что делает ее самой общей из всех физических наук) говорит о том, что тепло передается от более нагретого тела к менее нагретому. Как же в таком случае работает тепловая машина на изотермах T_1 и T_2 ? (Заметим, что два других отрезка

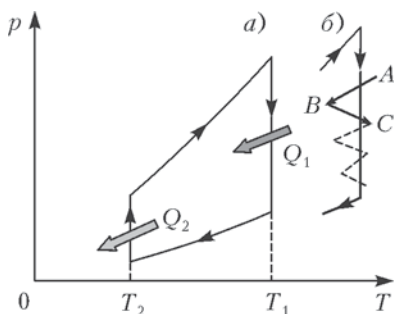


Рис. 2. а) Цикл Карно в координатах давление–температура; б) флуктуации температуры на «изотерме»

цикла «не пропускают» тепло: не случайно они называются погрешчески адиабатами, т.е. непреходимыми.)

Одно из объяснений использует понятие флуктуации температуры. Оказывается, существует принцип, связывающий неопределенность энергии и неопределенность температуры:

$$\Delta E \cdot \Delta \frac{1}{T} \geq k. \quad (2)$$

Здесь постоянная Больцмана играет роль, аналогичную роли постоянной Планка в соотношении (1). Этот принцип был «нащупан» еще Гиббсом и изложен в его замечательной монографии (1902 г.), завершившей создание классической статистической физики, с пышным названием, напоминающим средневековые трактаты: «Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики».

Конечно, Гиббс еще не знал понятия «постоянная Больцмана», так что в форме (2) этот принцип был сформулирован позднее Эйнштейном. Теперь мы можем представить себе изотерму не в виде прямой линии $T_1 = \text{const}$, а в виде некоторой ломаной (рис.2,б): в какие-то моменты времени из-за флуктуаций температуры рабочее тело становится чуть-чуть холоднее нагревателя и его тепло течет к рабочему телу тепловой машины (на участке AB); в другие моменты тело становится чуть-чуть горячее нагревателя, и часть тепла уходит назад (участок BC). Аналогичный процесс происходит на «изотерме» T_2 , на которой тепло отводится от рабочего тела к холодильнику.

Итак, две фундаментальные физические константы — два принципа неопределенности.

Но только ли в физике обнаружены такие принципы? В 1931 году австрийский логик, математик и философ математики



Рис. 3. Иллюстрация неопределенностей в плоскости понятий полнота — непротиворечивость

Курт Гёдель доказал теорему, смысл которой вкратце можно выразить так: невозможно создать систему аксиом одновременно полную и непротиворечивую. Если последние два понятия можно было бы выразить в виде чисел, то на соответствующей плоскости (рис.3), вероятно, возникла бы запретная зона, аналогичная прямоугольникам на рисунке 1. В результате один из замечательных ученых, анали-

зируя историю и методологию математики, совсем было расстроился: «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, “не имеющие пристанища в математическом мире...” Теорема Гёделя вызвала смятение в рядах математиков. Последующее развитие событий привело к новым осложнениям... Итак, статус математики ничем не лучше статуса физики» (М.Клайн. Математика. Утрата определенности).

Но так ли уж плохо, что нам запрещено что-либо знать слишком точно? Вот что пишут по этому поводу в одном философском сборнике: «В настоящее время можно считать доказанной несводимость знания к идеалу абсолютной строгости... Все это свидетельствует не только о том, что любая система человеческого знания включает в себя элементы, не могущие быть обоснованными теоретическими средствами вообще, но и о том, что без наличия подобного рода элементов не может существовать никакая научная система знания».

Возможно, став большими, вы постараетесь принять этот вызов Природы и проникнуть в запретные зоны, которые манят любознательных своей принципиальной недостижимостью.

А рояль? Его все-таки протащили в дверь! Ему, *макроскопическому*, принцип неопределенности нипочем.

Скорость и ускорение

Тест

а) В каждом из двух случаев ускорение совпадает с тангенциальной составляющей ускорения. При скатывании вниз (равноускоренное движение) тангенциальная составляющая направлена по скорости, при подъеме на горку (равнозамедленное движение) ускорение направлено против скорости (рис. 1, а).

б) Тело движется по окружности, значит, у тела есть нормальная составляющая ускорения, которая направлена к центру окружности. Кроме этого, по условию задачи скорость тела возрастает, следовательно, есть и тангенциальная составляющая ускорения, которая направлена вдоль скорости. Полное ускорение \vec{a} изображено на рисунке 1, б.

в) Нормальная составляющая ускорения есть, а тангенциальная отсутствует, так как скорость остается постоянной по величине. Само ускорение направлено так же, как нормальная составляющая, т.е. к центру окружности (рис. 1, в).

г) Есть и нормальная, и тангенциальная составляющие ускорения. Нормальная составляющая направлена к центру, тангенциальная – против скорости (рис. 1, г).

д) Прежде всего отметим, что траектория движения математического маятника – это окружность (рис. 1, д). Поэтому там, где скорость тела не равна нулю, есть

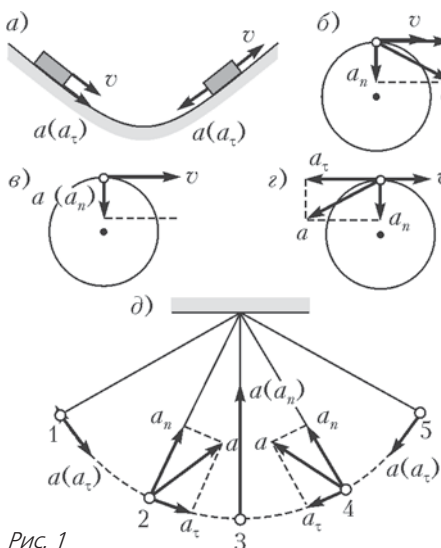


Рис. 1

нормальная составляющая ускорения. В самой нижней точке 3 скорость тела не равна нулю, более того, она в этой точке максимальна. А если так, то нормальная составляющая ускорения в этой точке есть, а тангенциальная отсутствует. Ускорение направлено так же, как нормальная составляющая, т.е. к точке подвеса маятника.

В промежуточных точках 2 и 4 скорость маятника отлична от нуля. Кроме того, она изменяется со временем: в точке 2 увеличивается, в точке 4 уменьшается. В этих точках существуют обе составляющие ускорения, нормальная составляющая направлена к точке подвеса, тангенциальная в точке 2 направлена по скорости, а в точке 4 – против скорости.

Крайние точки 1 и 5 – это точки поворота. Скорость в этих точках обращается в ноль, поэтому нормальная составляющая ускорения в обеих точках равна нулю. А есть ли в этих точках тангенциальная составляющая? Вот здесь, бывает, ошибаются даже самые сильные школьники. Правильный ответ – да, тангенциальное ускорение в точках остановки есть. Проще всего применить к этим точкам второй метод рассуждений – динамический. В точках 1 и 5 на тело действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Касательная составляющая силы тяжести и создает тангенциальное ускорение.

Сверхзвуковые самолеты и конус Маха

Задачи

2. В обоих случаях надо найти время, через которое конус Маха, коснувшись первого микрофона, коснется второго. а) Посмотрите на рисунок 2,а, на котором нарисована лишь половинка конуса Маха и трасса самолета проложена прямо через микрофоны. Вершина конуса – это сам самолет, поэтому движется она со скоростью самолета. Чтобы дойти до

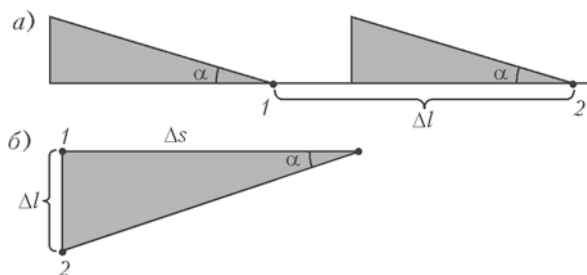


Рис. 2

второго микрофона, ей понадобится время

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v} = \frac{\Delta l}{2c} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

б) В этом случае посмотрите на рисунок 2,б. Чтобы конус Маха коснулся второго микрофона, самолету надо пройти путь $\Delta s = \Delta l \operatorname{ctg} \alpha = \Delta l \sqrt{M^2 - 1}$. Для этого нужно время

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\Delta l \sqrt{M^2 - 1}}{2c} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

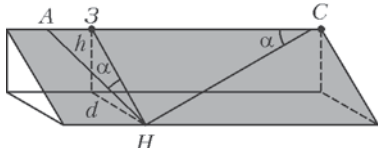


Рис. 3

3. В пространственном случае под точкой Z надо понимать не зенит, а ближайшую к наблюдателю точку на траектории самолета, и для длины отрезка ZH брать не высоту полета h , а минимальное рас-

стояние $\sqrt{h^2 + d^2}$ от наблюдателя до траектории (рис.3). Воспользуемся формулой (полученной в задаче 1) $h = \frac{v \Delta t}{\sqrt{M^2 - 1}}$ и запишем для каждого наблюдателя выражение для времени регистрации звукового сигнала:

$$t_1 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \frac{h}{c}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{c}, \quad t_3 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{c}.$$

Все времена отсчитаны от момента прохождения самолетом «зенита», которым для всех трех наблюдателей является точка Z . В условии задачи задаются не сами времена, а разности времен, поэтому система уравнений будет иметь вид

$$c \Delta t_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \left(\sqrt{h^2 + a^2} - h \right),$$

$$c \Delta t_3 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \left(\sqrt{h^2 + b^2} - \sqrt{h^2 + a^2} \right).$$

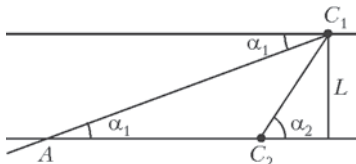


Рис. 4

Решение этих уравнений дает

$$H = 6000 \text{ м}, \quad M = 1,16.$$

4. На рисунке 4 изображен момент, когда первый летчик (более быстрый) услышит звук второго самолета. Рассмотрим

треугольник AC_1C_2 . В этом треугольнике нам заданы три величины: $\angle C_1AC_2 = \alpha_1$, $\angle AC_2C_1 = 180^\circ - \alpha_2$ и $AC_2 = (v_1 + v_2)\Delta t$. Расстояние между самолетами в тот момент, когда первый летчик слышит самолет второго, равно

$$C_1C_2 = (v_1 + v_2)\Delta t \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = c\Delta t \frac{(M_1 + M_2)M_2}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}},$$

расстояние между самолетами в момент, когда второй летчик услышит первый самолет, равно

$$AC_1 = (v_1 + v_2)\Delta t \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = c\Delta t \frac{(M_1 + M_2)M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}},$$

а расстояние между траекториями самолетов составляет

$$L = C_1C_2 \sin \alpha_2 = (v_1 + v_2)\Delta t \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = c\Delta t \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}}.$$

6. Сразу после того как первый самолет пересечет траекторию второго, на ней появятся две точки: A_1 и A_2 (рис.5). Первая будет двигаться навстречу второму самолету, а вторая – от него. Скорости обеих точек равны

$$v_{\perp} = \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Второй летчик будет слышать звук первого самолета, пока будет находиться внутри конуса Маха первого самолета, т.е. между точками A_1 и A_2 . Пусть t_1 – время встречи второго самолета с точкой A_1 , а t_2 – время, когда второй самолет догонит точку A_2 . Тогда для «длительности звучания первого самолета» Δt получим

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Если расстояние между самолетами было равно L и они движутся навстречу друг другу со скоростями v_2 и v_{\perp} , то они встретятся через время

$$t_1 = \frac{L}{v_2 + v_{\perp}}.$$

Если же один из самолетов движется в другую сторону, то второй нагонит первого через время

$$t_2 = \frac{L}{v_2 - v_{\perp}}.$$

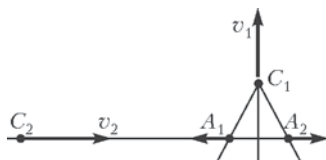


Рис. 5

Объединяя эти два ответа, окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{2v_{\perp}}{v_2^2 - v_{\perp}^2} L = \frac{2M_1 \sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2 M_2^2 - M_1^2 - M_2^2} \frac{L}{c} = 2,85 \text{ с}.$$

А вот пилот первого самолета никогда не услышит звука второго самолета, так как его скорость $v_1 = M_1 c = 990 \text{ м/с}$ больше скорости точки пересечения его траектории с конусом Маха второго самолета $v = \frac{v_2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} = 341 \text{ м/с}$.

Сверхзвуковые автобусы, лодки и... деревья

Задачи

2. На рисунке 6 изображен треугольник $OЕИ$ и указаны времена, за которые грибники прошли бы каждый из отрезков. Найдем число Маха в нашей задаче. Из точки E в точку I автобус двигался 10 мин, а грибнику понадобилось бы 50 мин, чтобы пройти этот путь. Следовательно, скорость автобуса в пять раз больше скорости грибника, и $M = 5$. А теперь подсчитаем, когда автобус придет в точку P . Время будет отсчитывать от момента выхода грибников из точки O . Автобусу

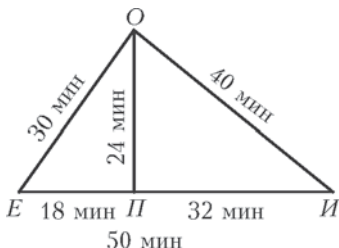


Рис. 6

понадобится 30 мин, чтобы доехать до точки E , и еще $18/5$ мин, чтобы из E доехать до P , всего – 33 мин 36 с. А Петр дойдет до точки P за 24 мин. Итого, ему придется подождать 9 мин 36 с.

3. Отметим сразу, что коли автобус приехал в точку P за 33 мин 36 с, то в момент начала движения грибников он находился от этой точки на расстоянии 168 мин движения грибников. Из условия задачи вытекает, что точка O находится в начальный момент внутри конуса Маха. А вот Сидору придется обязательно отправиться в путь, когда образующая конуса Маха коснется точки O (рис.7). В этот момент автобус будет находиться от точки P на расстоянии $OP \operatorname{ctg} \alpha = 24\sqrt{24}$ мин движения грибника. Итого, у Сидора в запасе столько времени, сколько понадобится автобусу, чтобы проехать из точки A_1 в точку A_2 . Грибнику, чтобы пройти этот участок, нужно $(168 - 24\sqrt{24})$ мин, а автобусу в пять раз меньше, т.е. приблизительно 10 мин 5 с. Именно столько времени есть у Сидора в запасе.

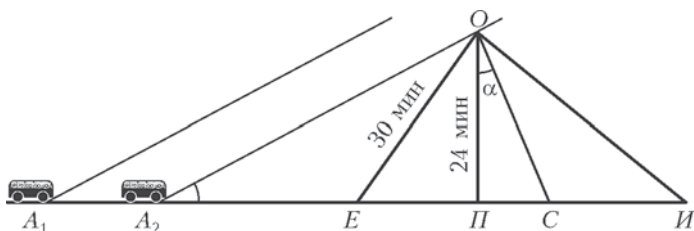
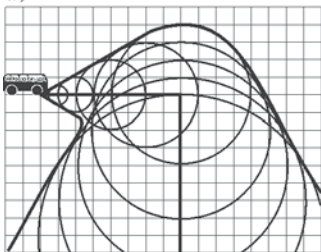


Рис. 7

4. Области достижимости автобуса изображены на рисунке 8.

5. Приведем лишь ответы: $\beta = 90^\circ$, $d = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 - c^2}$,
 $s = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 + c^2}$.

а)



б)

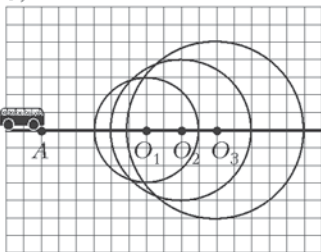


Рис. 8

6. Ответы: $\beta = \arccos \frac{c}{v}$, $t = \frac{L}{c} \frac{v}{\sqrt{v^2 - c^2}}$, $d = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 - c^2}$,
 $s = \frac{L}{c} v$.

7. По условию задачи время возвращения $t_2 = \frac{L}{c} \frac{v}{\sqrt{v^2 - c^2}}$ в два раза больше времени переправы $t_1 = \frac{L}{c}$. Отсюда получаем ответ:

$$\frac{v}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15; \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\sqrt{c^2 + v^2}}{v} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32.$$

8. 1) $t = 7$ мин 12 с; 2) $M = 5$.

9. 1) $t_{\min} = t_0 \sqrt{1 - M^2 \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}}$; 2) $M_{\max} = \frac{n+1}{n-1}$.

10. Лодочник должен направлять лодку под углом $\beta = \arccos \frac{v}{c} = \arccos 0,8$ к линии берега. Скорость лодки относительно берега равна $u = \sqrt{c^2 - v^2} = 3 \text{ м/с}$. Время переправы равно $t = \frac{L}{u} = 40 \text{ с}$.

Физическое судoku

Упражнения

1. $E_{\text{кн}} = 100 \text{ Дж}$, $E_{\text{к max}} = 500 \text{ Дж}$, $E_{\text{п max}} = 500 \text{ Дж}$, $E_{\text{п min}} = 0$; $E_{\text{к}} = 125 \text{ Дж}$.

2. Заполненная таблица «Физического судoku» приведена на рисунке 9 (маленькие цифры указывают последовательность заполнения); $E_{\text{к}} = 300 \text{ Дж}$, $E_{\text{к max}} = 400 \text{ Дж}$; $E_{\text{п max}} = 400 \text{ Дж}$.

	E	$E_{\text{к}}$	$E_{\text{п}}$
1	400 ₅	0 ₄	400 ₁
2	400 ₆	300 ₉	100 ₂
3	400 ₇	400 ₈	0 ₃

Рис. 9

3. Используя равенство $A_{\text{пот}} = -\Delta E_{\text{п}}$, получаем

$$\Delta E_{\text{к}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}} - \Delta E_{\text{п}}.$$

Отсюда следует

$$\Delta E = \Delta(E_{\text{к}} + E_{\text{п}}) = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}}, \text{ или } A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр}} = \Delta E.$$

4. Работа силы трения на каждом маленьком участке Δs равна $\Delta A = -F_{\text{тр}} \Delta s$, а сама сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \left(\cos \alpha - \frac{v^2}{Rg} \right),$$

где R – радиус кривизны траектории. Поэтому в общем случае для того чтобы работа силы трения при подъеме была равна работе силы трения при спуске, необходимо, чтобы скорости тела на одном и том же участке при спуске и при подъеме были одинаковыми. Впрочем, всех этих сложностей можно избежать, если представлять горку в таких задачах прямой ($R = \infty$) с

небольшим покрытым льдом ($\mu = 0$) переходным участком от наклонной части траектории к горизонтальной.

Задачи

5. На рисунке 10 приводится таблица «Физического судoku», заполненная с использованием неизвестной A_x . Коэффици-

	$Q =$	$\Delta U +$	A_{τ}
1-2	0_7	$-\frac{3}{2}A_1_9$	$\frac{3}{2}A_1_{10}$
2-3	$-A_x_6$	0_5	$-A_x_4$
3-1	$\frac{5}{2}A_1_3$	$\frac{3}{2}A_1_2$	A_1_1
Σ		0_8	$\frac{5}{2}A_1 - A_x_{11}$

Рис. 10

циент полезного действия связывает клетки таблицы следующим образом:

$$\eta = \frac{A_{\text{общ}}}{Q_{\text{пол}}} = \frac{(5/2)A_1 - A_x}{(5/2)A_1},$$

откуда следует ответ:

$$A_x = (1 - \eta) \cdot \frac{5}{2} A_1 = 1200 \text{ Дж}.$$

7. На рисунке 11 приводится заполненная таблица. Ответ имеет вид

$$A = 2mgh = \frac{mv^2}{2} = 460 \text{ Дж}.$$

	$A_{\text{внеш}} +$	$A_{\text{тр}} =$	ΔE
1-2	0_1	-210_3	-210_2
2-1	460_6	-210_4	250_5

Рис. 11

Приложение к журналу «Квант» №4/2016

Школа в «Кванте»

ФИЗИКА

Часть 3

Составители *В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 7,25 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

Индекс 90964



ШКОЛА В «КВАНТЕ» ФИЗИКА



Часть 3

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 4/2016